Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática

Ian Stewart

gedisa editorial

Ingeniosos
encuentros entre

Juegos

y matemática

Ian Stewart

gedisa
editorial

Título del original inglés:
Game, Set, and Math. Enigmas and Conundrums © *by* Ian Stewart, 1989

Traducción: Carlos Gardini *Diseño de cubierta e ilustración:* Gustavo Macri
Primera edición, Barcelona, 1990

Edición digital: Sargont (2019)

© *by* Editorial Gedisa S.A.
Barcelona, España

ISBN: 84-7432-408-4
Depósito legal: B. 42.763 - 1990

Impreso en España

Printed in Spain

Impreso en Romanyá/Valls, S.A. (Barcelona)

Índice

Prefacio

1. La manta de Mamá Gusano

2. El tenista ebrio

3. El laboratorio de infinormática

4. El Ourotoro auto voraz

5. ¿Falacia o aicalaf?

6. Construya su propio virus

7. Truco de paridad

8. Encuentros cercanos de la fase Fermat

9. El fractal de Pascal

10. El regreso del gusano

11. Todas las paralelas llevan a Roma

12. Los doce juegos de Navidad

Notas

Prefacio

Hace unos años Philippe Boulanger me pidió que recomendara a alguien para la columna de “Visiones matemáticas” de la revista *Pour la Science.* Se trata de la traducción francesa de *Scientific American,* y Philippe es el jefe de redacción. Yo conocí la revista en mi adolescencia, y mi mayor placer consistía en la columna de “Juegos matemáticos” de Martin Gardner. Cuando Gardner dejó de escribirla, la columna eventualmente se transformó en la admirable “Recreaciones informáticas” de A. K. Dewdney. El cambio es quizá un símbolo de nuestros tiempos, pero la idea de que los ordenadores iban a reemplazar las matemáticas se topó en Francia con una gran resistencia y “Juegos matemáticos” sobrevivió, en tándem con “Recreaciones informáticas”, con el título “Visions Mathématiques”. Eso concuerda con mi visión del mundo: la informática y las matemáticas mantienen una relación simbiótica, y se necesitan mutuamente. De todos modos, el redactor de la columna había partido hacia nuevos horizontes, y Philippe buscaba un reemplazante.

¿Conocía yo a la persona indicada? Claro que la conocía, y modestamente ofrecí mi consejo: “Yo”.

Sospecho que Philippe aceptó con algunas reservas. Al cabo de dos años la columna ha descubierto su propia identidad y su propio estilo. Yo la escribo en inglés, y Philippe la traduce (con gran habilidad, y también con grandes licencias) al francés. Yo trato de elaborar retruécanos que funcionen en francés: aludiendo a los festivos navideños, por ejemplo, “los doce juegos de Navidad”. Eso se traduce como “les douze *jeux* de Noel”, mientras que “los doce días de Navidad” es “les douze *jours* de Noel”. Y en la actualidad, cada vez que encuentro elementos matemáticos interesantes, una parte de mi mente piensa si podría explicarlo en *Pour la Science.* Ello ofrece una perspectiva muy diferente; y por lo menos en una ocasión una idea que había tenido al pensar en “Visions Mathématiques” resultó ser útil en investigaciones de fondo.

Sea como fuere, he aquí este libro, una selección de doce artículos que presentan conceptos matemáticos serios de manera jocosa. Los he revisado y actualizado. Algunas personas intentan convencernos de que “la matemática puede ser divertida”. Creo que el énfasis está mal

puesto. Para mí, la matemática *es* divertida, y este libro es una consecuencia natural de mi modo de enfocar el tema.

Desde luego, entiendo por qué la mayoría de la gente encuentra desconcertante esa afirmación. Para ver por qué la matemática es divertida, se necesita la perspectiva atinada. No hay que dejarse agobiar por los símbolos ni por la jerga, y hay que concentrarse en las ideas; hay que pensar en la matemática como una amiga, no como una enemiga. No digo que la matemática sea siempre un alegre retozo, pero cada cual debería disfrutarla en su propio nivel. ¿A usted le agradan los crucigramas y los rompecabezas? ¿Le gusta jugar a las damas o al ajedrez? ¿Le fascinan los diseños repetitivos? ¿Le interesa averiguar cómo funcionan las cosas? Entonces usted tiene capacidad para disfrutar de las ideas matemáticas. Y si las disfruta de veras, quizá llegue a ser un matemático.

Necesitamos más matemáticos. La matemática es fundamental para nuestro estilo de vida. ¿Cuánta gente, mirando un programa de televisión, advierte que sin matemática no habría nada que mirar? La matemática fue un ingrediente crucial en el descubrimiento de las ondas de radio. Controla el diseño de los circuitos electrónicos que procesan las señales. Cuando la imagen de la pantalla forma un cilindro que al girar revela otra imagen, una apabullante cantidad de operaciones matemáticas dan vida a los gráficos por computación.

Pero eso es la matemática en funcionamiento. Este libro trata sobre el lado ligero: la matemática como juego.

Ambas cosas no están muy distanciadas. La matemática es un notable caudal de imaginación que abarca desde la pura curiosidad intelectual hasta los usos más prácticos; y todo es una sola cosa. Los últimos años han presenciado una notable reunificación de la matemática pura y la aplicada. La topología está abriendo zonas enteramente nuevas de la dinámica; la geometría de las elipsoides multidimensionales está dando ganancias a AT&T; Ítems oscuros como los grupos *p*-ádicos participan en el diseño de redes telefónicas eficientes; y el conjunto de Cantor describe el funcionamiento de nuestro corazón. El juego intelectual de ayer se ha transformado en los ingresos empresariales de hoy.

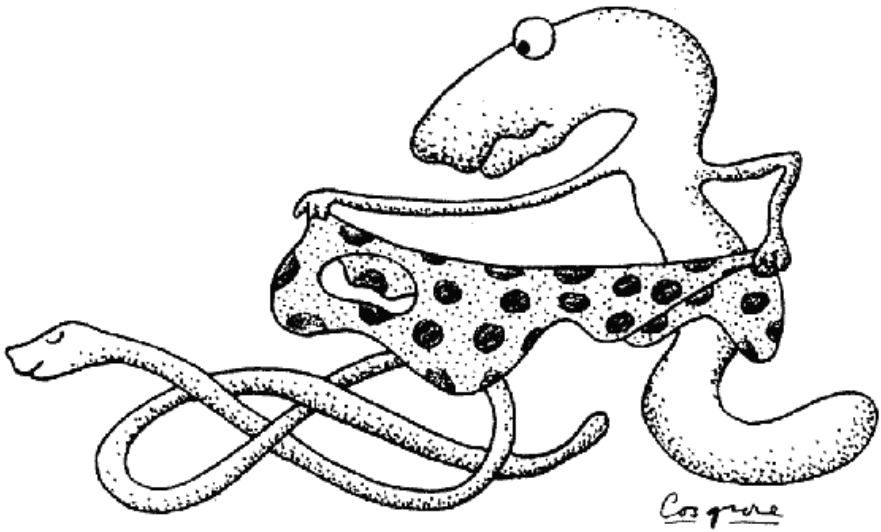
Sin embargo, usted encontrará aquí el aspecto lúdico de la matemática, no el que sirve para ganarse el pan. Algunos Ítems son viejos favoritos, algunos son absolutamente nuevos. La mayoría de los capítulos incluyen problemas, con las soluciones al final, además de diversas actividades y juegos. Pero también hay una intención más seria. Espero que al menos algunos lectores se sientan inspirados para averiguar algo más sobre el fascinante mundo mental que se extiende

detrás de nuestras bromas. Las ideas que usted encontrará están conectadas con la matemática real, aunque es perdonable que usted no las descubra detrás del grueso disfraz. “La manta de Mamá Gusano” es un problema sobre teoría de medición geométrica, y “El tenista ebrio” es sobre procesos estocásticos y series de Markov. “Truco de paridad” introduce la topología algebraica; “El Ourotoro autovoraz” conduce a la teoría de la codificación y las telecomunicaciones. Por otra parte, puedo asegurar que “Encuentros cercanos de la fase Fermat” no tiene nada que ver con el viaje espacial ni con la industria cinematográfica.

¿O sí?

Ian Stewart
Coventry, Inglaterra

1. La manta de Mamá Gusano



—¡Demonios! —exclamó Mamá Gusano.

—¿Ocurre algo, querida?

—Es nuestra dulce y pequeña Gustrudis. Sé que no debería criticar a la niña, pero a veces... ¡Su manta se ha caído de nuevo! ¡Se enfriará hasta los huesos!

—Ana Lida, los gusanos no tienen huesos.

—¡Bien, se enfriará hasta el tejido endodérmico, Enrique! El problema es que cuando duerme, se contorsiona y enrolla adoptando posiciones extravagantes, y la manta se cae.

—¿Se mueve cuando ya está dormida?

—No, Enrique, duerme como un tronco.

Incluso parece un tronco, pensó Enrique Gusano, pero no lo dijo en voz alta.

—Entonces espera a que se duerma para taparla, querida.

—Sí, Enrique, he pensado en ello. Pero hay otro problema.

—Dime, cariño.

—¿Qué forma debería tener la sábana?

Enrique tardó un rato en hallar la respuesta. Resultó ser que Mamá Gusano quería una manta que cubriera totalmente a la niña gusano, sin importar cómo se enrollara. Sólo el gusano, entiéndase bien, no la zona que ella rodea. La manta puede tener agujeros, pero Mamá Gusano, siendo ahorrativa, deseaba que la superficie de la manta fuera tan pequeña como resultara posible.

—Ah —dijo Papá Gusano, quien, como habrán notado ustedes, es algo pedante—. Podemos escoger unidades de tal modo que la longitud de ese pequeño horr... de la querida Gustrudis sea la unidad 1. Tu estás preguntando qué forma tiene el conjunto plano de superficie mínima que cubrirá cualquier curva plana de longitud 1. Y sin duda también deseas saber qué es esta superficie mínima.

—Precisamente, Enrique.

—Ajá. Difícil...

El problema de la manta de Mamá Gusano es muy escurridizo y se nos resbala de las manos. Pero, como Enrique le explicó a su esposa —para disimular su incapacidad para responder la pregunta— hay principios generales que pueden constituir la base de un abordaje. Supongamos que sabemos dónde están algunos puntos del gusano: ¿qué podemos decir sobre el resto? Señaló dos de esos principios (recuadro 1.1): dependen del hecho de que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une.

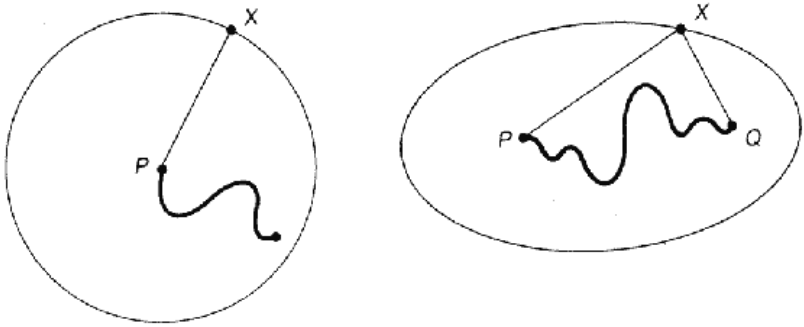
—Excelente —dijo Papá Gusano—. Ahora, querida Ana Lida, podemos hacer algunos progresos. Una aplicación del Principio del Círculo demuestra que un círculo de diámetro 2 por cierto mantendrá tibia a Gustrudis. Tiende el centro de la manta sobre la cola del bebé, querida: el resto de ella no puede ser superior a su longitud total. ¿Qué tamaño tiene la manta? Bien, un círculo de diámetro 2 tiene una superficie de π, que como recordarás es aproximadamente 3,14159...

Recuadro 1.1 Normas para la manta

El Principio del Círculo. Supongamos que tenemos una porción de gusano de longitud *L,* y sabemos que uno de sus extremos está en la punta P. Entonces esa porción se encuentra dentro de un círculo de radio L, centro P. La razón: todo punto de esa porción está a una distancia L o menos respecto de P, medida a lo largo del gusano. La distancia en línea recta es por

tanto también L o menos. Pero tales puntos se encuentran dentro del círculo de radio L.

El Principio de la Elipse. Supongamos que tenemos una porción de gusano de longitud *L,* y sabemos dónde están ambos extremos. Supongamos que los extremos están en los puntos P y *Q* del plano. Formemos una curva de la siguiente manera. Sujetemos una cuerda de longitud *L* entre P y *Q,* insertemos la punta de un lápiz y tensemos la línea. Al moverse, el lápiz describe una elipse cuyos focos son P y Q. Los puntos que hay dentro de esta elipse son esos puntos X para los cuales PX + *XQ* es menor o igual que L. Por tanto cada punto de la porción de gusano aludida se encuentra dentro de esta elipse (figura 1.1).



PX = L: Círculo
PX + XQ = L : Elipse

1.1. Una porción de gusano de longitud L, un punto P de la cual es conocido, se encuentra dentro de un círculo de radio L, centro P. Si dos puntos P y Q son conocidos, entonces la porción se encuentra dentro de una elipse con P y Q como focos, consistente en todos los puntos X, de tal modo que PX + XQ = L.

—¡Suficiente, Enrique! Ya he pensado en algo mucho mejor. Supongamos que cortamos a Gustrudis en dos, justo por la mitad. ¡Mentalmente, desde luego! Cada mitad está dentro de un círculo de radio 1/2 centrado en su punto medio. Si pongo una manta circular de radio 1/2, es decir, diámetro 1, de tal modo que el centro se extienda sobre el punto medio de Bebé, cubrirá a nuestra querida criatura.

¿Cuál es la superficie ahora? ¿Recuerda pi por radio al cuadrado?

De hecho éste es el *círculo* más pequeño que siempre cubrirá a Bebé, porque si ella se estira hasta ponerse recta puede escurrirse por cualquier círculo de diámetro inferior a 1. ¿Pero una forma que no sea un círculo puede ser más económica?

—Espero que sí —gruñó Papá Gusano, quien tendría que pagar por la manta, mientras se retiraba a su estudio. Dos horas después salió con varias hojas de papel y anunció que la propuesta de Ana Lida, un círculo de diámetro 1, era por lo menos del doble de lo necesario.

—Buenas noticias, querida. Un *semicírculo* de diámetro 1 tiene tamaño suficiente para cubrir a Bebé por mucho que la cretina... quiero decir, la criatura se contorsione antes de dormirse.

Eso reduce aún más la superficie: ¿a cuánto?

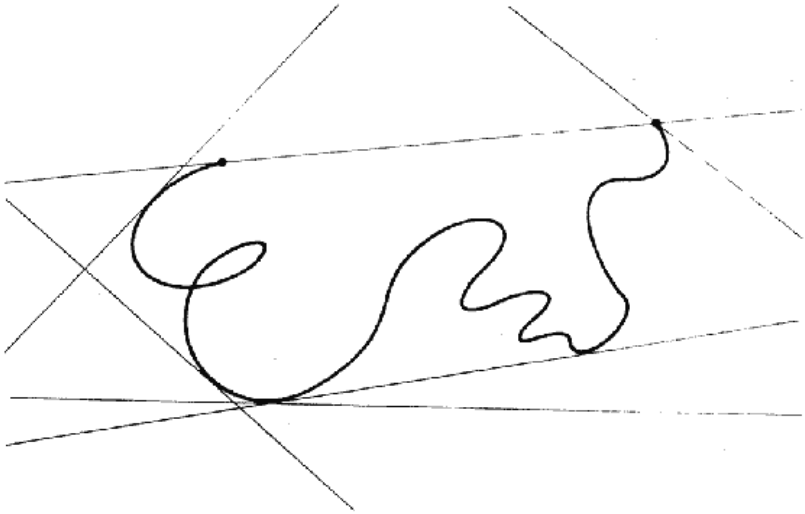
Como he dicho, Enrique Gusano es un pedante. No dice nada sin estar seguro de que es verdad. Así que no sólo ha hecho experimentos con semicírculos, sino que tiene la demostración de que el semicírculo unidad (un semicírculo de diámetro 1) siempre funciona. No es una demostración fácil, y no culparé a quien desee saltearla. Pero la demostración es la esencia de la matemática, y quizás usted desee seguir el razonamiento de Papá Gusano. En tal caso, está en el recuadro 1.2.

—Muy astuto, Enrique —dijo Ana Lida—. Pero yo creo que la misma idea demuestra que puedes recortar otros fragmentos del semicírculo. Como ves, cuando *P* y *Q* están más cerca entre sí que *b,* la distancia entre X e Y es inferior a 1. Sin duda eso nos deja margen para una mejora.

—Ajá. Quizá tengas razón, querida. Pero resulta muy complicado resolver lo que viene a continuación. —Y Enrique se apresuró a cambiar de tema. Mis lectores más perseverantes quizá deseen insistir en el asunto, pues Ana Lida tiene razón: el semicírculo unidad *no* es la mejor forma posible. En verdad *nadie sabe qué forma debería tener la manta de Bebé Gusano.* El problema queda abierto. Recuerde usted que debe cubrirla, no importa qué forma adopte la niña al contorsionarse; y debe demostrar que es así. Si puede mejorar $\pi/8$, hágamelo saber.

Recuadro 1.2. La demostración de Papá Gusano

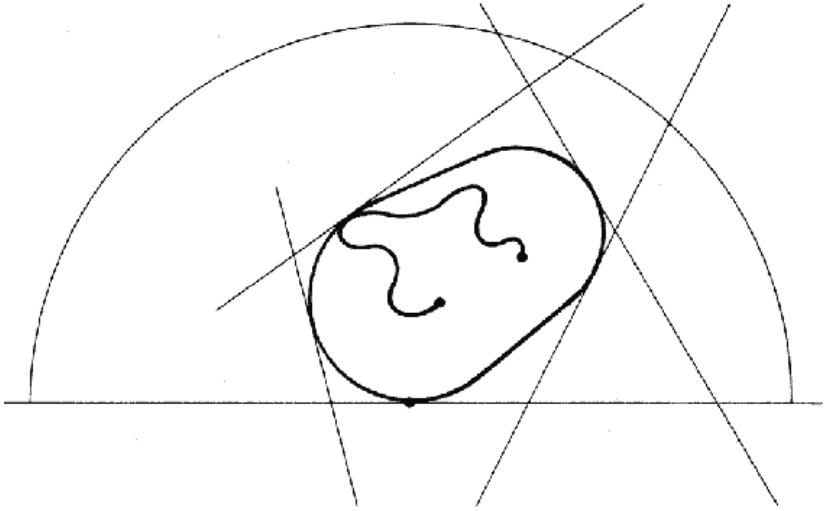
Una línea que toque a Gustrudis en uno o varios puntos, pero de tal modo que ella yazga totalmente sobre un lado de dicha línea, se llama *línea de soporte* (figura 1.2). Las líneas de soporte existen en cualquier dirección. Sólo empiece con una línea que apunte en esa dirección y deslícela hasta que toque al gusano. Note que las líneas de soporte pueden tocar el gusano en más de un punto.



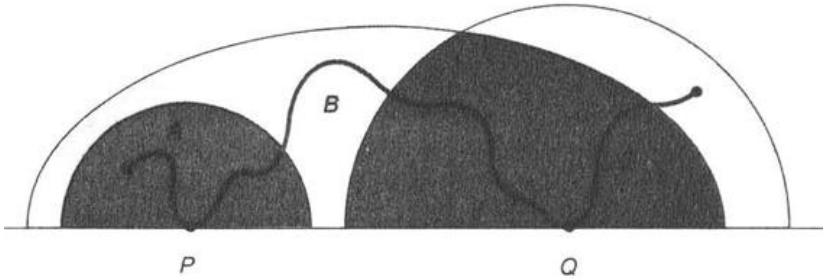
1.2. Líneas de soporte

Primero, supongamos que cada línea de soporte toca a Gustrudis en exactamente un punto. Entonces Gustrudis debe estar enrollada en un rizo convexo cerrado, quizá con otros fragmentos de su interior (figura 1.3). Supongamos que toca una línea de soporte en un punto P. Entonces todos los puntos del rizo están a una distancia 1/2 o menos respecto de P, medida a lo largo del gusano; por ende también se mide en una línea recta. También ocurre así con los demás puntos que hay dentro del rizo. Por ende Gustrudis está dentro del círculo de radio 1/2 centro P. Pero ella también yace en un lado del diámetro de este círculo formado por la línea de soporte. Así yace dentro de una unidad semicircular.

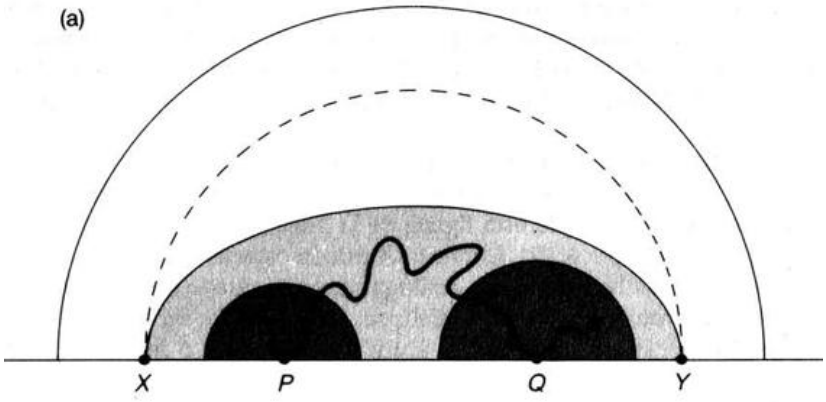
Alternativamente, una línea de soporte toca a Gustrudis en por lo menos dos puntos P y Q. Estos puntos la dividen en tres segmentos *A, B, C* de longitudes *a, b, c,* donde $a + b + c = 1$ (figura 1.4). La distancia entre P y *Q* es a lo sumo *b* porque el segmento *B* une P con Q. Según el Principio del Círculo, el segmento *A* se encuentra dentro de un centro circular *P* radio a; pero también se encuentra en un lado de la línea de soporte, así que en realidad se encuentra dentro de un semicírculo de radio a. Análogamente el segmento C se encuentra dentro de un semicírculo de radio *c*.

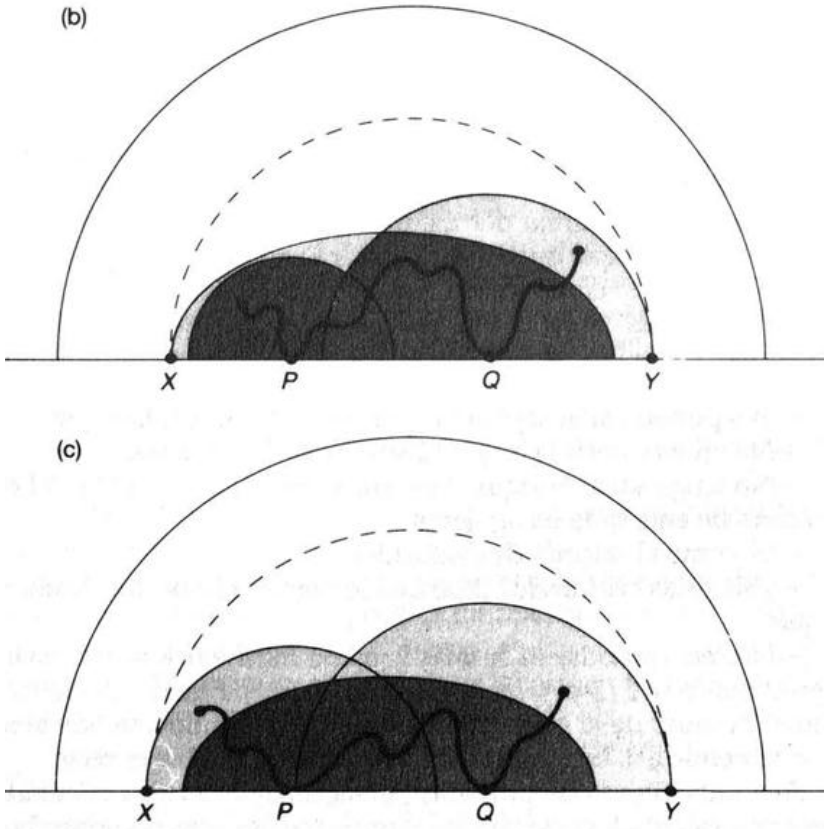


13 Si cada línea de soporte toca al gusano en un solo punto, entonces el gusano determina un rizo convexo de perímetro inferior o igual al y por ende se encuentra dentro de una unidad semicircular.



1.4 Si una línea de soporte toca al gusano en dos puntos, entonces el gusano se encuentra dentro de una figura obtenida mediante la superposición de dos semicírculos y una semielipse.





1.5. Hay tres posibles disposiciones de los semicírculos y la semielipse. En los tres la distancia XY es a lo sumo 1. Por ende el semicírculo (punteado) que tiene XY por diámetro encaja dentro del semicírculo exterior. Lo mismo pasa con el gusano.

¿Qué hay del segmento B? Por el Principio de la Elipse, se encuentra dentro de una elipse cuyos focos están en P y *Q,* entre los cuales podemos tender un cordel de longitud *b.* A causa de la línea de soporte, *B* se encuentra en realidad dentro de una semielipse (la mitad de una elipse).

Así todo el gusano se encuentra en una complicada figura formada por la superposición de dos semicírculos y una semielipse. Sean X é Y los puntos extremos de esta figura de la línea de soporte. Ahora hay una pequeña complicación. El punto X puede estar en el centro (de semicírculo) P o en la semielipse; análogamente, Y puede estar en el centro (de semicírculo) Q o en la semielipse. Sin embargo, en cada caso no es difícil mostrar que la distancia entre X e Y es de 1 o menos (figura 1.5).

Ahora bien, la elipse es más “chata” que un círculo; así que ambos semicírculos y la semielipse encajan dentro de un

semicírculo cuyo diámetro es XY. Como XY es 1 o menos, Gustrudis entra dentro de un semicírculo unidad.

Más tarde esa noche, Enrique soltó de golpe el periódico, volcando un vaso de Cresa-Cola y empapando la foto de primera plana de Margusan Thatcher.

—¡Ana Lida! ¡Olvidamos preguntar si hay una solución!

No hay manera de aplacar a un pedante. Pero en cierto modo tiene razón. Los conjuntos planos pueden ser mucho más complejos que las cosas tradicionales como los círculos y polígonos. Quizá la manta no sea convexa. De hecho, podría tener agujeros. ¿Y a qué aludimos al hablar de la "superficie" de un conjunto complejo de planos?

—Por Dios —exclamó Enrique—. ¡Quizá la superficie mínima sea *cero*!

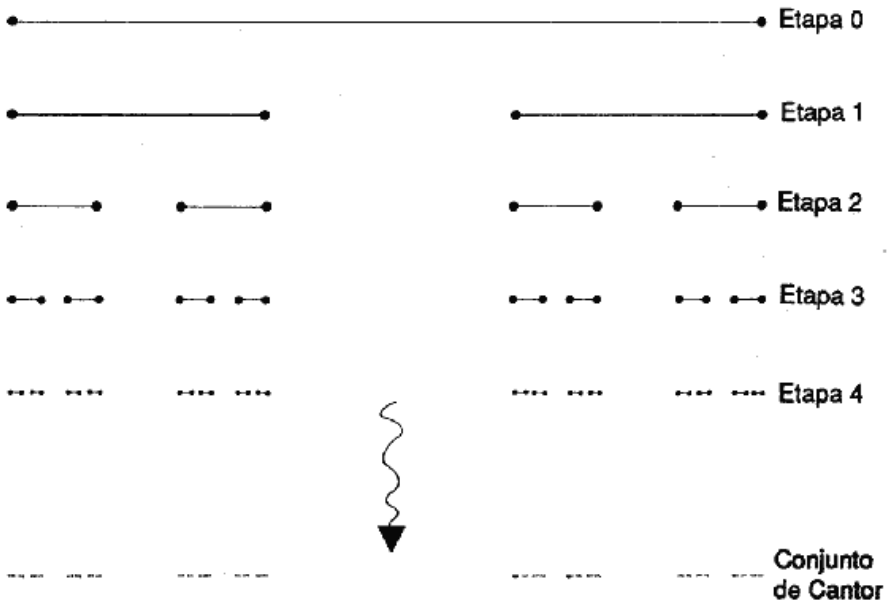
—No seas tonto, querido. ¡En tal caso no habría manta!

Enrique se sirvió un sorbo y lo bebió con una sonrisa desdeñosa.

—Ana Lida, obviamente es hora de que te hable del conjunto de Cantor.

—¿Qué tiene que ver el canto con...?

—Cantor, querida, no canto. Georg Cantor fue un matemático alemán que inventó un conjunto muy curioso en 1883. En realidad, el inglés Henry Smith lo conocía en 1876, pero "conjunto de Smith" no impresionaría a nadie, ¿verdad? Para obtener un conjunto de Cantor empiezas con un segmento de longitud 1, y le quitas el tercio del medio. Ahora quitas el tercio del medio de cada parte restante. Repito, hasta el infinito. Lo que queda es el conjunto de Cantor. (Figura 1.6)



1.6 Construcción del conjunto de Cantor mediante la eliminación de los tercios medios. Su longitud es cero, pero contiene infinitamente muchos puntos.

—No entiendo cómo puede quedar algo, Enrique.

—Pero queda. Ante todo, quedan todas las puntas de los segmentos más pequeños. Y muchas otras. Pero en cierto sentido tienes razón, querida. ¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor?

—Sus puntas están separadas por una distancia 1, Enrique.

—No, quiero decir la longitud sin contar las lagunas.

—No tengo idea, Enrique. Pero me parece muy pequeño. El conjunto consiste ante todo en agujeros.

—Sí, como el calcetín de Gustrudis.

—¿Me estás criticando? ¡Mañana le zurciré el calcetín! Nada menos que...

—No, no, querida, nada más lejos de mi intención. Veamos. La longitud reduce a 2/3 el tamaño de cada etapa, de modo que la longitud total después de la etapa enésima es $(2/3)^n$. Como n tiende al infinito, esto tiende a 0. La longitud del conjunto de Cantor es cero.

Ana Lida dedujo las primeras potencias de 2/3 en su calculadora (no era una calculadora de bolsillo porque los gusanos no tienen bolsillo) y cabeceó.

—Ahora bien, el conjunto de Cantor, a pesar de consistir mayormente en agujeros, tiene una propiedad notable —continuó Enrique sin desmayo—. Dado cualquier número entre 0 y 1, hay dos puntos del conjunto de Cantor cuya distancia entre sí es exactamente igual a ese número. Eh... no creo que te interese la demostración,

querida, así que demos por sentado que el resultado es verdadero, ¿sí? Bien. Ahora supongamos que Bebé sólo puede enroscarse formando rectángulos...

—Enrique, sabes muy bien que se contorsiona como cualquier bebé gusano.

—Supongamos que estuvo jugando al balón-cola y tiene las articulaciones endurecidas.

Agreguemos que Gustrudis va a una escuela progresista que ataca el sexismo y estimula la igualdad de oportunidades desalentando las diferencias entre gusanos varones y mujeres (claro que usted no notaría tales diferencias) y donde las niñas gusano juegan al balón-cola igual que los varones. No obstante, Ana Lida hizo una objeción.

—¡Sabes muy bien que los gusanos no tienen articulaciones, Enrique!

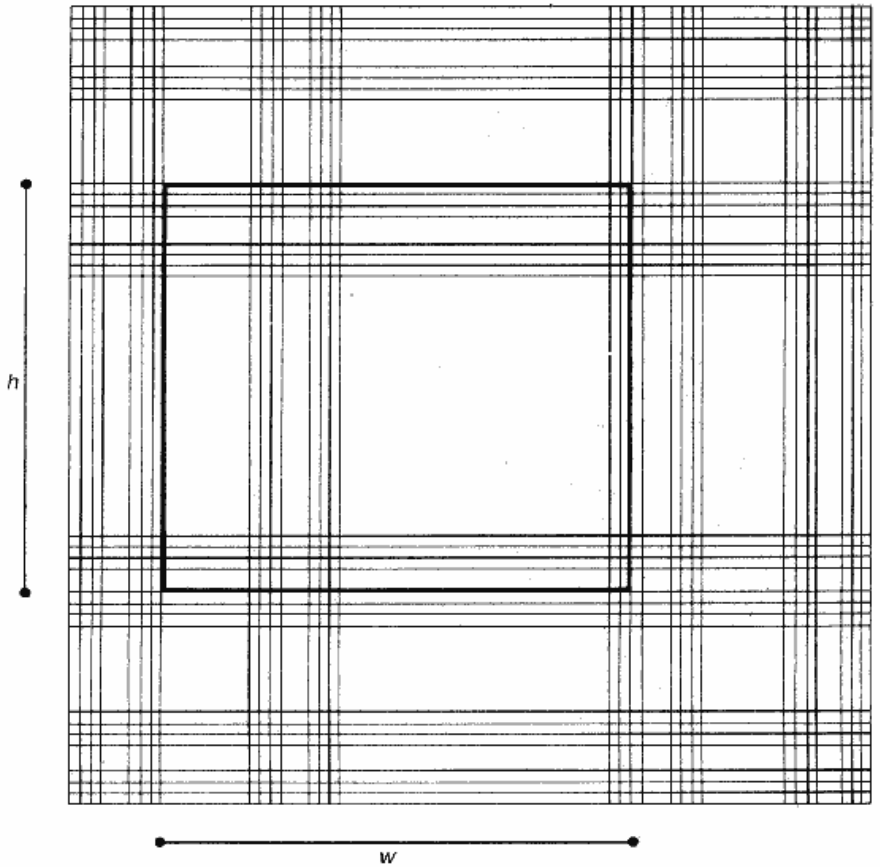
—¡Oh, santa lombriz! Haz de cuenta que sí. ¡Tan sólo para complacerme!

—Bien —resopló Ana Lida—. Ya que insistes.

—Gracias. Como la longitud de Gustrudis es 1, la altura y la anchura del rectángulo están entre 0 y 1. Así puedo hallar dos puntos del conjunto de Cantor cuya distancia entre sí sea igual a la altura, y dos más cuya distancia entre sí sea igual a la anchura. Ahora examinaré el tartán de Cantor.

—Cantor no es nombre *escocés,* Enrique.

—Muy bien, el tartán de MacCantor. Tomo un conjunto de líneas horizontales de longitud unidad, espaciadas verticalmente de acuerdo con el conjunto de Cantor, junto con un conjunto de líneas verticales, espaciadas horizontalmente de la misma manera (figura 1.7). En el conjunto horizontal puedo hallar dos líneas cuya distancia entre sí sea igual a la altura del rectángulo, y en el conjunto vertical dos líneas cuya distancia entre sí sea igual a su anchura. Así, como J. R. Kinney descubrió en 1968, el tartán de MacCantor se puede colocar de tal modo que cubra el rectángulo de Bebé Gusano.



1.7. El tartán de MacCantor puede cubrir cualquier rectángulo, pues el conjunto de Cantor contiene puntos a una distancia h *y* w *de todos los* h *y* w.

—Te refieres al perímetro, no al interior del rectángulo.

—Naturalmente. La manta debe cubrir a Gustrudis, no el espacio que ella encierra.

—Eso no es una manta, Enrique: es una red.

—Si deseas, rebautizaré este capítulo “La red de Bebé Anguila”. Pero entonces no constará tu nombre.

—No, no, Enrique. Ahora comprendo que es una manta celular.

—Excelente. También tiene superficie cero. La parte horizontal tiene una superficie $0 \times 1 = 0$ y también la parte vertical, porque el conjunto de Cantor tiene longitud 0.

—De modo que para los gusanos rectangulares —dijo Ana Lida— existe una manta de superficie cero que los cubre totalmente. ¡Qué resultado extravagante! —Hizo una pausa—. Pero desde luego eso es porque los rectángulos son muy especiales.

—Bien, sí y no —dijo Enrique Gusano—. Estuve leyendo acerca de este problema, y resulta ser que en 1970 D. J. Ward construyó una

manta de superficie cero capaz de cubrir a cualquier gusano poligonal. Es decir, un gusano constituido por una cantidad grande pero finita de segmentos rectos. Esa manta es un enredo muy confuso, desde luego... casi toda agujeros.

—Muy curioso, querido. ¿Y qué dices de los gusanos lisos, como nuestra viscosa y flexible Gustrudis?

—Bien, por un tiempo los matemáticos se preguntaron si existiría una manta universal de superficie cero para gusanos lisos... hablando en jerga vermícula, desde luego. Pero en 1979, J. M. Marstrand demostró que ninguna manta de superficie cero puede cubrir a todos los gusanos lisos.

—Notable. Se habrá requerido una geometría muy dificultosa para probarlo.

—Entiendo que la principal idea consistía en usar el concepto de la entropía de un espacio métrico totalmente delimitado, querida mía.

—¡Fascinante, Enrique! Cuéntame más.

—Bien... no creo que te interese saber todo eso, Ana Lida. La teoría ergódica es un poco ardua...

—No sabes, ¿verdad, Enrique?

—Bien... No. Pero de todos modos sabemos que la superficie mínima para la manta de Bebé tiene que ser superior a cero.

Mamá Gusano también puede ser pedante.

—¿De veras, Enrique? ¿No podrá haber una manta de superficie 1/2 que funcione, y una de superficie 1/4, y una de superficie 1/8, y así sucesivamente... superficies mayores que cero pero empequeñeciéndose a medida que nos plazca? Entonces la superficie mínima sería cero, pero no se correspondería en realidad con una manta.

¿Puede usted pensar en un problema simple sobre superficies mínimas donde esto ocurra? He aquí una pista: la tienda de Mamá Mosquito.

Pero Papá Gusano sabía que estaba vencido, y ya estaba hablando del problema análogo en tres dimensiones: el saco de dormir de Bebé Gusano. ¿Cuál es el volumen mínimo que albergará a un gusano de longitud 1 en un espacio tridimensional común? Y ese problema está casi inexplorado. ¿Podrá usted avanzar hacia una solución?

Soluciones

El círculo de radio $r = 1/2$ tiene una superficie $\pi r^2 = \pi\,(1/2)^2 = \pi/4$, lo cual equivale aproximadamente a 0,785. ¡Fácil! Sí, pero éste es sólo el problema inicial.

Reducir eso a la mitad para obtener un semicírculo nos lleva a $\pi/8$,

aproximadamente 0,393.

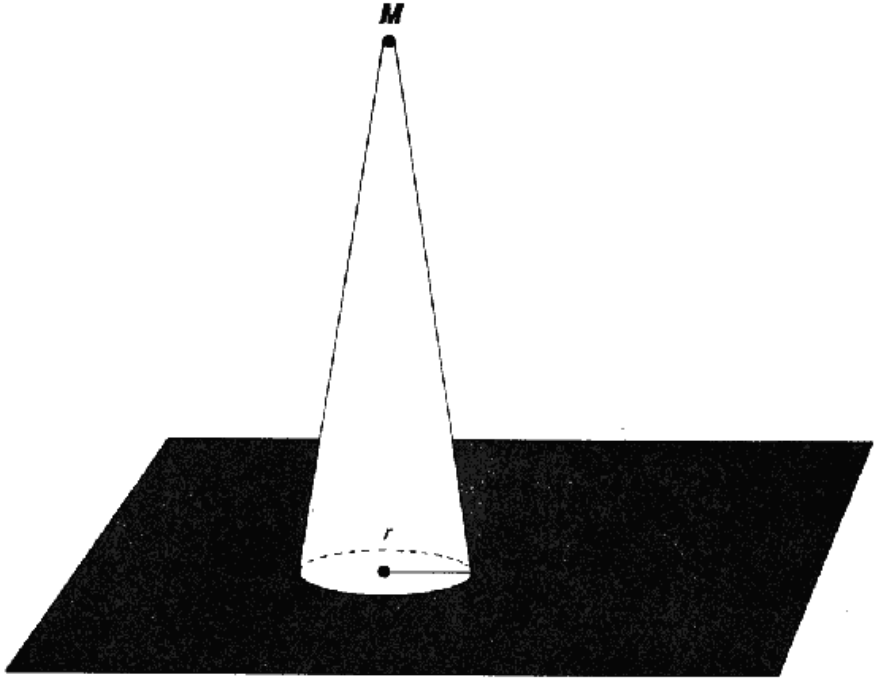
He aquí un ejemplo de problema de reducción de superficie que tiene soluciones de superficie no cero arbitrariamente pequeñas, pero no tiene una solución con superficie cero. Mamá Mosquito está haciendo una tienda para que su hija Mosquidia pueda ir de camping. Mosquidia es diminuta, apenas más que un punto; siempre duerme revoloteando a cierta distancia del piso. La tienda debe cubrirle la cabeza para que no la moje la lluvia y llegar hasta el suelo para que no entren ráfagas. ¿Cuál es la superficie mínima de una tienda apropiada?

La respuesta es que cualquier superficie superior a cero funcionará, *pero no cero.*

Para entender por qué, imagine usted un mosquito-punto M, a cierta distancia —que denominaremos unidad 1— por encima de un plano. El problema de la tienda de Mamá Mosquito se reduce a esto: ¿cuál es la superficie más pequeña cuyos límites se encuentren en el plano, y que pase por M? Pensemos en una superficie cónica (figura 1.8) cuya base sea un círculo de unidades de radio r. Entonces la superficie del cono es πr, y podemos volverla tan pequeña como queramos escogiendo un r suficientemente pequeño. Por ejemplo, si $r = 0{,}000\,000\,001$ entonces la superficie es 0,000 000 003 14....

Pero para obtener una superficie cero debemos dejar que $r = 0$, y entonces el cono se transforma en un segmento lineal que une M al plano. ¡Pero un segmento lineal no es una superficie!

Este ejemplo indica que los problemas de reducción de superficie pueden no tener solución: es decir, la superficie “mínima” quizá no se pueda obtener.



1.8 La tienda de Mamá Mosquito, un problema sin solución mínima.

El saco de dormir de Bebé Gusano: ¿Quiere reducir la superficie o el volumen? ¡A elección de usted! Argumentos similares pueden conducirlo a una semiesfera de radio $r = 1/2$, con volumen $2/3\ \pi r^3 = \pi/12$ aproximadamente 0,262; y la superficie $3\pi r^2$ (¿por qué?) $= 3/4\ \pi$, aproximadamente 2,356. Pero debe ser posible mejorar esas cifras.

Otras lecturas

K. J. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets,* Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

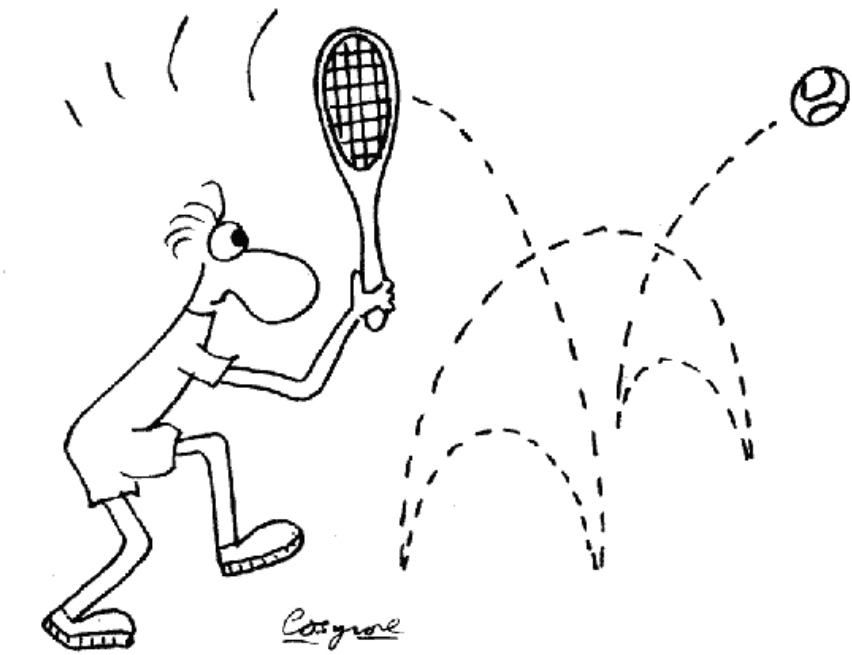
J. M. Marstrand: "Packing Smooth Curves in R9", *Mathematika, 26* (1979), págs. 1-11

Herbert Meschowski: *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry,* Budapest, Ungar, 1966.

C. Stanley Ogilvy: *Tomorrow's Math,* Oxford, Oxford University Press, 1972.

D. J. Ward: "A Set of Zero Plane Measure Containing All Finite Polygonal Arcs", *Canadian Journal of Mathematics,* 22 (1970), págs. 815-21.

2. El tenista ebrio



Se ha reiniciado la temporada de tenis.

Hace unas semanas, pasé la tarde en el club de tenis local, jugando un grato partido con mi amigo Dermis Raqueta. Me ganó en los *sets,* 6-3,6-1,6-2. Después, mientras empinábamos unas cervezas en el bar, me asaltó un interrogante.

—Dermis, ¿por qué me ganas siempre?

—Soy mejor que tú, amigo.

—Sí, pero no eres tanto mejor. Llevé la cuenta y calculo que gano un tercio de los puntos. ¡Pero no gano un tercio de los partidos!

—Seamos francos, no ganas ningún partido conmigo. —Bebió un sorbo de cerveza—. Es porque no ganas los puntos cruciales, los que

importan de veras. ¿Recuerdas que ganabas 40-30 cuando el set iba tres games a dos? Podrías haber empatado en tres. En cambio...

—Serví una falta doble. Sí, lo sé. Pero calculo que aún gano un tercio de los puntos cruciales. No, quiero otra explicación.

—Yo quiero otra cerveza —dijo Dennis—. Yo invito esta vez. Regreso en seguida —Se levantó y se dirigió a la barra abriéndose paso en la multitud y gritando por encima del tumulto—: ¡Elsa, dos cervezas y un paquete de cacahuetes! Con un vaso en cada mano, emprendió el regreso. Había tanta gente que hacía dos pasos al costado por cada paso hacia adelante.

Entonces comprendí.

¡Por eso Dennis gana siempre!

Se sentó, y decidí comentarle mi repentina iluminación.

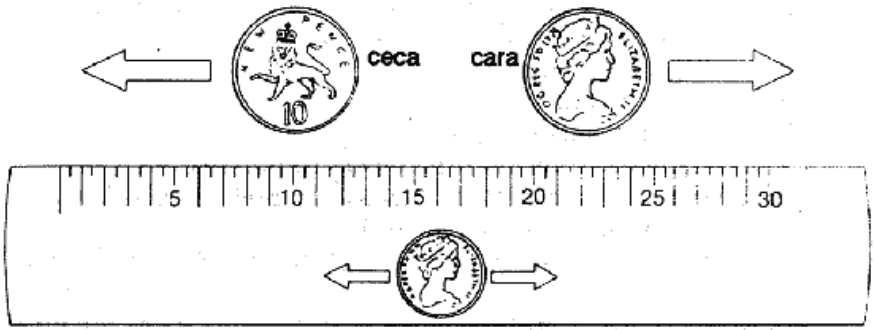
—¡Lo he descubierto! ¡Por qué ganas siempre! Te miraba volver de la barra, y de pronto pensé: andar de ebrio.

—Los ebrios no andan, se tambalean. ¡Pero yo sólo bebí dos cervezas!

Me apresuré a aclararle que el giro elegido no contenía ninguna alusión personal. El "andar de ebrio" —también llamado, con menos pintoresquismo, andar aleatorio— es un concepto matemático: el movimiento de un punto que se desplaza a lo largo de una línea, a la izquierda o la derecha, al azar. O en una figura con forma de cuadrícula, dando pasos aleatorios hacia el norte, el sur, el este o el oeste. En 1960 Frederik Pohl escribió un cuento de ciencia ficción titulado "Andar de ebrio", y lo describió de este modo:

> Cornut recordaba el concepto con afecto y claridad. Había sido estudiante de segundo año, y el maestro era el viejo Wayne; el audiovisual había consistido en un títere ebrio que se alejaba de un poste en miniatura con pasos ebrios y aleatorios en direcciones ebrias y aleatorias.

Para simular el andar de ebrio más simple, sólo se necesitan una regla de 30 cm y dos monedas. Una moneda actúa como señalador, la otra como generador de números aleatorios. Sitúe la moneda-señalador en 15 cm. Arroje la otra. Si sale "cara", mueva la moneda-señalador 1 cm a la derecha; si sale "ceca", muévala a la izquierda (figura 2.1).



2.1 Equipo para una excursión aleatoria.

De acuerdo con la teoría de las probabilidades, después de n movimientos usted estará a una distancia de $\sqrt{n}$ cm del medio. (¡Inténtelo!) A pesar de ello, las probabilidades de regresar eventualmente al medio son 1 (certidumbre). Por otra parte, en promedio se tarda un tiempo infinito en llegar allí. El andar de ebrio tiene sus sutilezas. Con un andar ebrio en una cuadrícula, usted aún tiene una probabilidad 1 de regresar al centro; pero en tres dimensiones la probabilidad de regresar al centro es de 0,35. Un ebrio perdido en el desierto eventualmente llegará al oasis; pero un astronauta ebrio perdido en el espacio tiene una probabilidad sobre tres de llegar a casa. Tal vez debieron informarle eso a ET.

Años atrás un teórico de las probabilidades me dijo que el espacio dimensional mínimo donde las probabilidades de llegar a casa son inferiores a 1 es un espacio de 2,5 dimensiones, pero nunca entendí por qué.

Como usted ve, los matemáticos han trabajado mucho sobre el andar aleatorio. Es importante. Por ejemplo, crean modelos de la difusión de las moléculas en las colisiones aleatorias dentro de gases y líquidos. Y se los puede usar para analizar los juegos de azar.

Tales como el tenis.

Dennis dijo que no entendía la conexión.

—Pero hay una —dije—. Presta atención y te explicaré por qué. Empecemos con algo más simple. Supongamos que Angus y Bathsheba se turnan para arrojar una moneda. Si sale cara, Angus obtiene un punto. Ceca, Bathsheba gana el punto. Angus triunfa si aventaja a Bathsheba por tres puntos; y Bathsheba gana si aventaja a Angus por tres puntos. Si ninguno de los dos ganó al cabo de diez tiros, hay empate. ¿Entiendes?

—Ese juego no es física ni intelectualmente interesante —masculló Dennis.

—Correcto, genio. ¿Qué probabilidades de ganar tiene Angus?

—¿Cincuenta y cincuenta? Oh, no. También pueden empatar. Una probabilidad sobre tres.

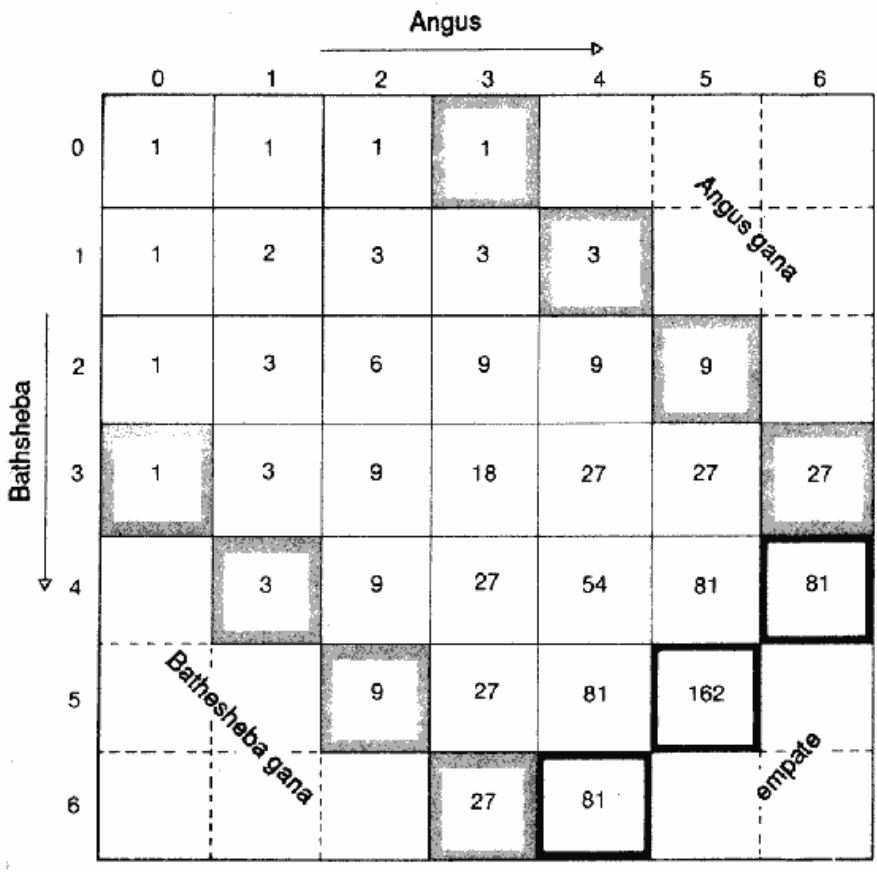
—Entiendo. Puede ganar, empatar o perder. Tú crees que cada una de las tres cosas es igualmente probable. Como arrojar una moneda: puede caer cara, ceca o de canto, así que la probabilidad de que caiga de canto es una sobre tres.

No le agradó mi tono sarcástico.

—De acuerdo, sabihondo. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

—No lo sé.

—¡Ja!



2.2. Angus y Bathsheba arrojan una moneda.

—Pero si me pasas la servilleta lo deduciré. —Y me puse a dibujar un diagrama (figura 2.2).

—¿Qué es eso?

—Estoy marcando el puntaje total de Angus arriba, empezando desde 0, y el de Bathsheba al costado. Luego deduciré de cuántos modos el juego puede llegar a cada posición legal. Luego contaré cuántas son victorias para Angus. Bien, eso es lo esencial, pero en

realidad debo ser más cuidadoso: llegaré a eso dentro de un instante.

Escribí una hilera de números 1 arriba y otra al costado.

—¿Para qué tantos números 1?

—Significan, por ejemplo, que hay un solo modo de que Angus gane 3:0. Tiene que ganar los tres primeros tiros.

—Ah.

—Pero hay dos modos de llegar a un puntaje 1:1.

—Entiendo. O Angus o Bathsheba gana el primer tiro, luego pierde el segundo.

—Exacto. En otras palabras, el puntaje del tiro anterior es 1:0 o 0:1 a favor de Angus o Bathsheba... lo cual se corresponde con los cuadrados de arriba y a la izquierda del cuadrado 1:1. Cada cual contiene un 1, y simplemente sumamos los dos números.

"El mismo método nos permite deducir de cuántos modos el juego puede llegar a cualquier posición dada, digamos *m:n.* La posición previa era o bien *(m*–1): *n* o bien *m* : (*n*–1), y ésas son las posiciones de arriba y de la izquierda. Súmalas e inclúyelas. Desde luego tienes que resolver sistemáticamente los posibles resultados. Por ejemplo, la única razón que conozco para poner 9 en el cuadrado 3:2 es que ya tenga 3 en el 3:1 y 6 en las posiciones 2:2. ¿De acuerdo?

—Comprendido.

—Y no incluyes cuadrados donde un jugador ya ganó, porque allí se detiene el juego. El número de 3:5, por ejemplo, no es la suma de los números de 3:4 y 2:5, porque en 2:5 Bathsheba ganó y se detuvo el juego.

—Se está complicando, amigo.

—Pamplinas, sólo tienes que ser sistemático y tomar en cuenta las reglas del juego. Ahora bien, Angus gana si el puntaje es 3:0, 4:1, 5:2 o 6:3, y Bathsheba gana si es 0:3, 1:4, 2:5 o 3:6. Marcaré esos cuadrados con un borde sombreado.

—¿Y 7:4?

—Dije que el juego se detiene a los diez tiros. Eso pasa en los puntajes de 4:6, 5:5 y 6:4. En esos cuadrados pondré un borde negro. ¡Allí tienes!

Examinamos el diagrama.

—Angus gana de 1 + 3 + 9 + 27 modos —dijo Dennis—. Eso es 40. Pierde de 40 modos, y hay empate de 324 modos. Eso significa 40 + 40 + 324 = 404 posibilidades en total. Así que sus probabilidades de ganar son de 40/404, lo cual es 0,0990099. Aproximadamente una sobre diez. No me convence. Debes de haber cometido un error.

—En absoluto. Tú cometes un error. El mismo de antes: supones que cada caso tiene iguales probabilidades. Pero como los juegos

continúan por diferentes cantidades de turnos, no son igualmente probables.

Compré dos cervezas más y mientras bebía señalé que la Teoría de las Probabilidades se basa en dos (¡hip!) principios básicos (¡hip!).

1. Para obtener la probabilidad de un conjunto de eventos se suman las probabilidades individuales.
2. Para obtener la probabilidad de dos eventos independientes que ocurren por turnos se multiplican sus probabilidades en conjunto.

Por ejemplo, si uno arroja un dado la probabilidad de cada puntaje en la gama de 1 a 6 es 1/6, porque todos los resultados tienen igual probabilidad. La probabilidad de arrojar un 5 o bien un 6 es de (1/6) + (1/6) = 1/3. Por otra parte, si arrojamos dos dados, por ejemplo uno rojo y uno azul, la probabilidad de que el rojo sea 5 y el azul sea 6 es de (1/6)×(1/6) = 1/36.

—Para obtener la respuesta correcta —dije—, tan sólo hay que aplicar las reglas. En cada tiro, Angus tiene una probabilidad 1/2 de ganar, al igual que Bathsheba. Así que cada movimiento hacia un cuadrado del diagrama, al costado o abajo, multiplica las probabilidades en 1/2. Las probabilidades de que gane Angus 3:0 son (1/2)×(1/2)×(1/2), o 1/8. Las probabilidades de que gane 4:1 no son 3/8 sino 3/32, porque eso implica dos tiros más. Así que sus probabilidades de ganar son

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}+\frac{27}{512}$$

lo cual significa 175/512, aproximadamente 0,3418.

Dermis lucía satisfecho consigo mismo.

—Te dije que tenía una probabilidad sobre tres de ganar. —Y añadió “¡Ay!” cuando le di un puntapié.

—Para corroborar el cálculo, Dermis, observarás que las probabilidades de empate son de 324/1024, las probabilidades de que gane Bathsheba son de 175/512 y la suma de las tres fracciones es

$$\frac{175}{512}+\frac{324}{1024}+\frac{175}{512}=1$$

si no he cometido ningún error.

—Eres un genio. ¿Pero qué tiene que ver todo esto con el tenis?

—Es lo mismo, aunque con reglas diferentes. El tenis consiste en una serie de puntos o *points,* que conducen a *games,* que conducen a

sets, que conducen a un *match.* Para mantenerlo simple, supongamos que Angus y Bathsheba juegan un *game* de tenis. En cada *point,* Angus gana o pierde, y Bathsheba gana o pierde. El ganador del *game* es el primer jugador que obtiene cuatro puntos. A menos que el puntaje llegue a tres en total, en cuyo caso...

—¿Qué clase de puntaje es tres en total en tenis?

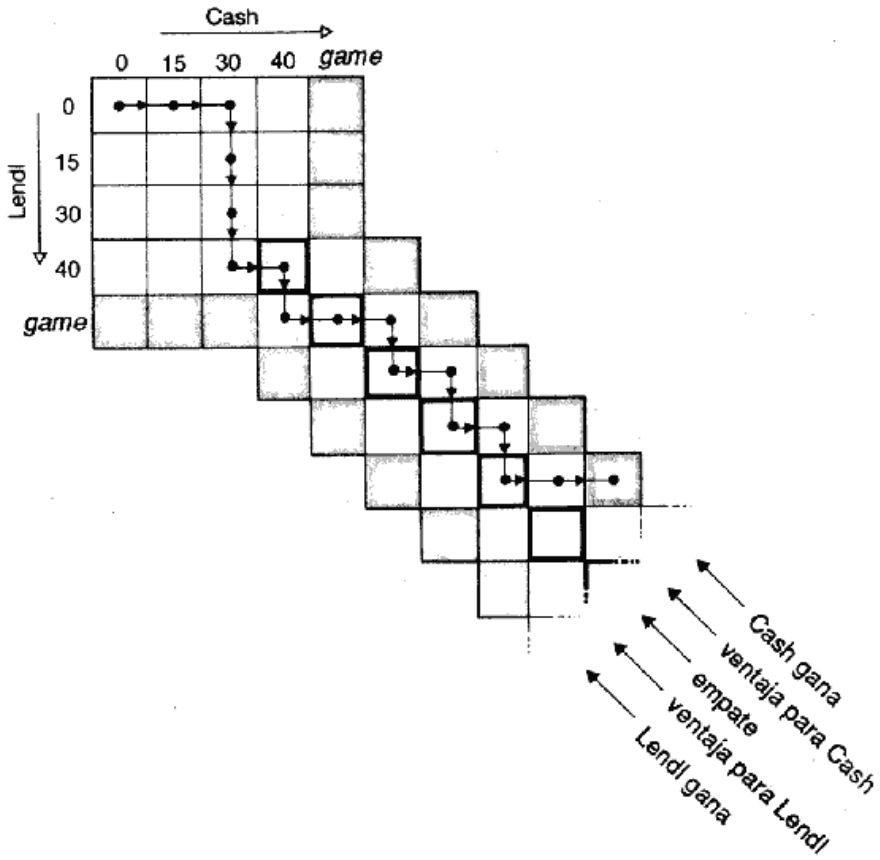
—Empate. Mira, el tenis tiene un sistema tonto para contar que va 15, 30,40, *game* en vez de 1, 2, 3, 4, eso es todo. El "40" es en realidad "45", pero la gente se volvió perezosa; supongo que un *game* es en realidad 60. Originalmente debió de haber una razón, pero ignoro cuál fue y ahora es tradicional.

"Cuando el puntaje llega a empate, el *game* continúa hasta que uno de ambos jugadores *aventaja al otro por dos puntos.*

"Puedes representar un partido de tenis en un diagrama, tal como el que trazamos para el juego de arrojar las monedas. —Fui hasta el anaquel, traje un libro de puntajes de tenis y escogí uno al azar—. Mira, aquí está el quinto *game* del segundo *set* de la final de *singles* masculinos de 1987 en Wimbledon. Pat Cash contra Ivan Lendl. Cash ganaba 3-1 en el segundo *set* y estaban un *set* a cero. Lendl sirvió y perdió. He aquí el puntaje. (Figura 2.3)

—Oh, entiendo. Muy ingenioso, el modo en que un game empatado baja por ese curioso zigzag.

—Lo mismo ocurre en los *tie-breaks:* lo verás cuando llegue allí. En principio un *game* puede continuar para siempre. Desde luego, las probabilidades de que eso ocurre ascienden a cero.

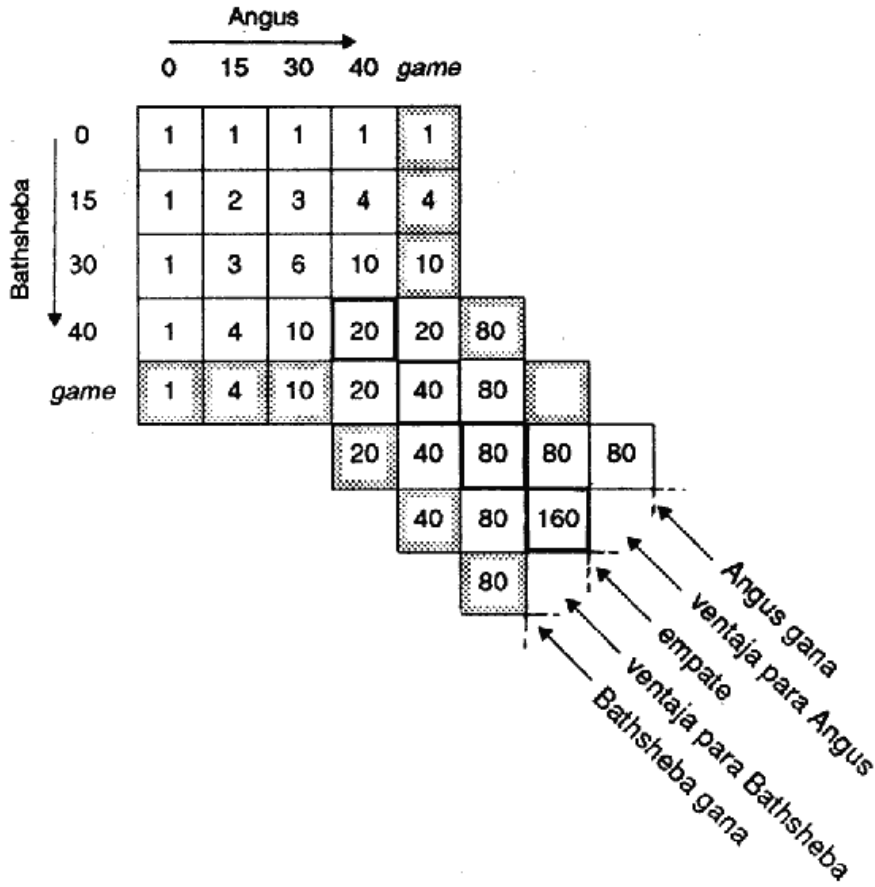


2.3. Pat Cash y Ivan Lendl juegan al tenis: Lendl sirve.

"De cualquier modo, puedes atribuir números a los cuadrados, de la misma manera: cada cuadrado contiene la suma de los números que están inmediatamente arriba y a la izquierda, a menos que esos cuadrados representen el final de un *game,* lo cual sólo importa en un *gante* empatado (figura 2.4).

"Desde luego, las probabilidades de que un jugador determinado gane un punto ya no son 1/2. Los mejores jugadores ganan puntos con mayor frecuencia, de ahí mi queja cuando nos sentamos. Para mantenerlo simple, daré por sentado que la probabilidad es siempre similar en cada punto.

—Pero... —objetó Dermis.



2.4. Combinatoria de un juego de tenis.

—Pero los jugadores tienen más probabilidades de ganar si ellos sirven... sí, lo sé. Pero empecemos con algo simple. El mismo método se hará cargo de diferentes probabilidades según quién sirva, pero se pone muy complicado en tal caso.

"Así que Angus gana cualquier punto dado con una probabilidad p, y pierde con una probabilidad *q,* lo cual debe ser igual a $1 - p$.

"Ahora bien, cada movimiento horizontal es un punto ganado por Angus, así que tiene probabilidad *p,* mientras que un movimiento vertical tiene probabilidad *q*. Por ejemplo, la probabilidad de que Angus gane el game 30 es de $10p^4q^2$ porque el cuadrado del *game* 30 contiene el número 10, y está a cuatro cuadrados horizontales y dos verticales del punto de partida. Su probabilidad total de ganar es $p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2$, más lo que surja cuando el *game* vaya empatado.

"Los empates complican un poco las cosas. Pero veamos cómo van los números que representan triunfos de Angus en la diagonal: 10, 20, 40, 80, 160, ... duplicándose todo el tiempo. Tenemos que sumar una

serie infinita

$$10p^4q^2 + 20p^5q^3 + 40p^6q^4 + 80p^7q^5 + \ldots$$

y luego añadir $p^4 + 4p^4q$. Ahora la serie infinita es

$$10p^4q^2\,(1 + 2pq + 4p^2q^2 + 8p^3q^3 + \ldots)$$

y la expresión entre paréntesis es una progresión geométrica.

—¡Las estudié en la escuela!

—¿Recuerdas cuál es la suma?

—No. Jamás le vi mucho sentido a estas cosas.

—$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = 1/(1–r)$. Siempre que $–1 < r < 1$, desde luego. ¡Ahora ves para qué sirve! Francamente, me asombra que juegues tan bien al tenis sin saber cómo se suma una progresión geométrica. De todos modos... Cada término es $2pq$ veces el anterior, así que la expresión que está entre paréntesis es $1/(1–2pq)$. Con lo cual, las probabilidades que tiene Angus de ganar son exactamente

$$p^4 + 4p^4q + \frac{10p^4q^2}{1 - 2pq}$$

¿No es una belleza?

—La belleza está en los ojos de quien la contempla —dijo Dennis —. Permíteme invitarte con otra cerveza. Debes de tener sed después de tantos cálculos. —Se levantó con esfuerzo—. Yo tengo sed, sin duda —masculló mientras daba un paso tambaleante.

Mientras él se abría paso hasta la barra, deduje mis probabilidades de ganarle un *game,* dando por sentado que mi probabilidad de ganar un punto fuera de uno sobre tres. Eso significaba $p = 1/3$, $q = 2/3$, y la fórmula me daba una probabilidad de $35/243 = 0{,}144$. Aproximadamente 1/7.

—Dennis: si tengo una probabilidad sobre tres de ganar cada punto, sólo tengo una sobre siete de ganar un *game.* ¡Con razón siempre me ganas! Las reglas del tenis amplifican las diferencias entre los jugadores. Apuesto a que la amplific... (¡hic!) amplific... apuesto a que crece aún más si tomas en cuenta los *sets* y los *matches.*

—Tal vez, amigo. Pero es hora de irse.

—¿Por qué? Sólo empezaba a...

—Cierra la barra.

Para superar la resaca pasé la mañana siguiente deduciendo qué ocurre cuando se toman en cuenta los *sets* y los *matches.* Los métodos son similares a los que he descrito, así que sintetizaré los resultados.

Primero, recordemos las reglas.

En los *singles* masculinos, un *match* consiste en un máximo de cinco

sets. Un jugador debe ganar por lo menos tres sets, y estar dos *sets* o más por delante del oponente, excepto en un puntaje 3-2.

Para ganar un *set,* el tenista debe ganar por lo menos seis *games,* y llevar dos o más *games* de ventaja. Un *set* en la posición 6-5 o 5-6 continúa por un *game* más, y se gana si el puntaje va a 7-5 o 5-7. Si un *set* llega a 6-6, se pasa a un *tie-break,* excepto por el quinto *set* de un *match,* en cuyo caso continúa indefinidamente hasta que un jugador lleva dos *games* de ventaja.

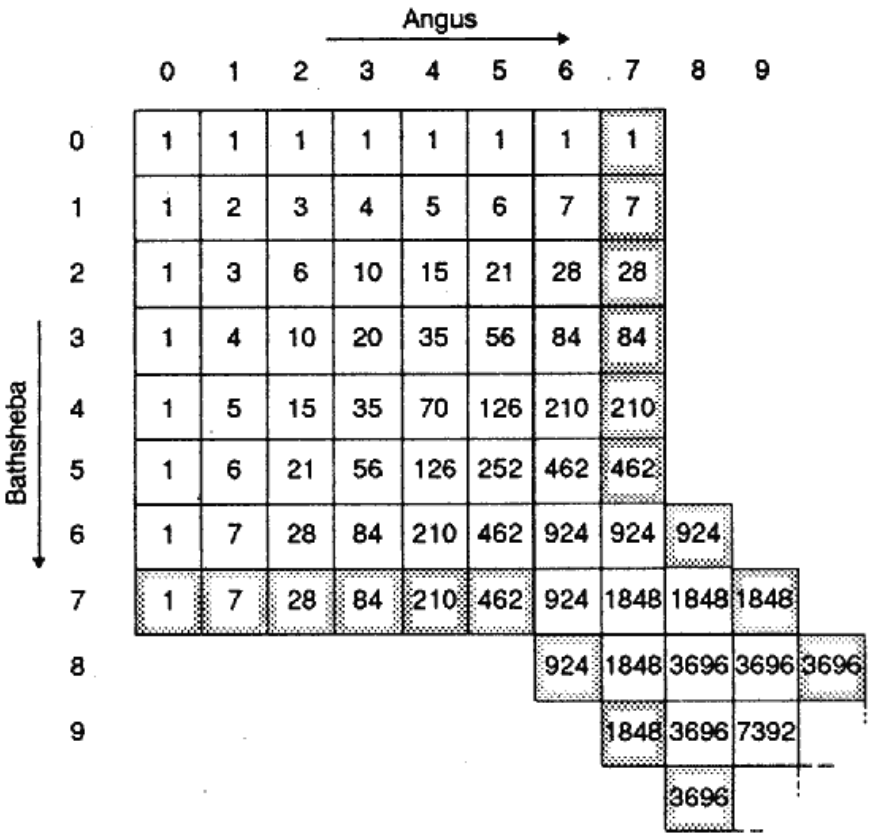
Un *tie-break* es muy parecido a un *game* normal. Sin embargo, el puntaje va 0, 1, 2, ..., como los *games* de un *set* y no como los puntos de un *game.* Para ganar, hay que anotar por lo menos 7, y llevar por lo menos dos puntos de ventaja.

Antes de la introducción de la regla del *tie-break* o ruptura del empate, todos los *sets* continuaban hasta que uno de los bandos llevaba dos *games* de ventaja. En un *match* doble del 15 de mayo de 1949, F. R. Schroeder y R. Falkenburg jugaron contra R. A. González y H. W. Stewart (todos de los Estados Unidos) y ganaron el primer *set* por un margen de treinta y seis *games* contra treinta y cuatro. El puntaje final fue 36-34, 3-6, 4-6, 6-4, 19-17, y el *match* tardó cuatro horas y tres cuartos.

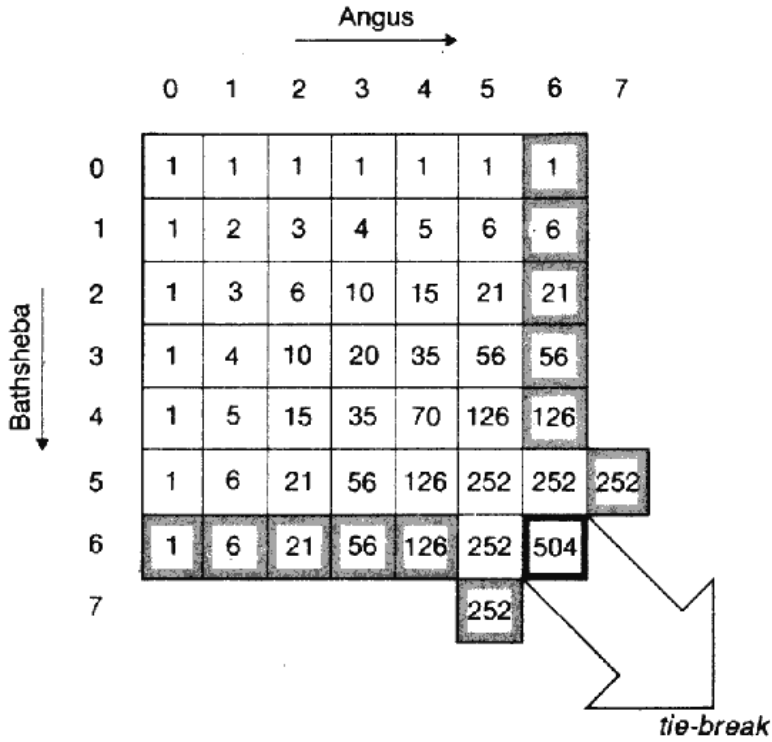
Eso explica por qué se cambiaron las reglas.

Los diagramas de un *game tie-break,* un *set* con o sin *tie-break,* y un *match,* se muestran en las figuras 2.5-2.8. Las fórmulas correspondientes a las probabilidades de ganar se muestran en el recuadro 2.1. Usted podrá entender cómo se derivan de los diagramas. La P mayúscula significa “probabilidad de ganar”, no importa lo que siga entre paréntesis. Si el juego puede continuar indefinidamente, la fórmula incluye la suma de una progresión geométrica infinita.

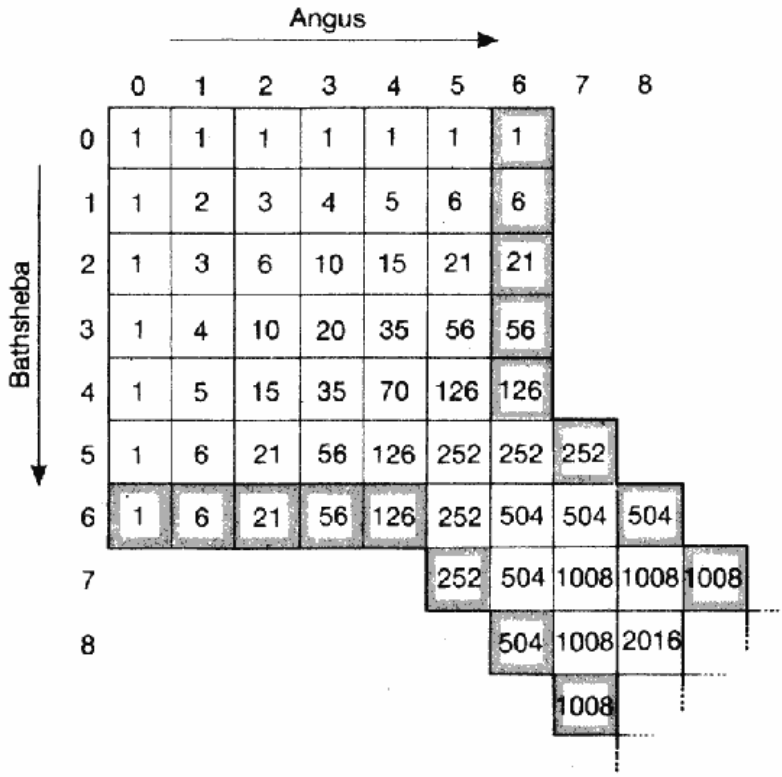
Las reglas para los *singles* femeninos son un poco distintas. Un *match* se puede ganar o bien por dos *sets* contra cero o bien por dos *sets* contra uno. Se juegan *tie-breaks* en cada *set.* Usted puede efectuar este análisis por su cuenta.


Angus
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Bathsheba
0 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 2 3 4 5 6 7 7
2 1 3 6 10 15 21 28 28
3 1 4 10 20 35 56 84 84
4 1 5 15 35 70 126 210 210
5 1 6 21 56 126 252 462 462
6 1 7 28 84 210 462 924 924 924
7 1 7 28 84 210 462 924 1848 1848 1848
8 924 1848 3696 3696 3696
9 1848 3696 7392
3696

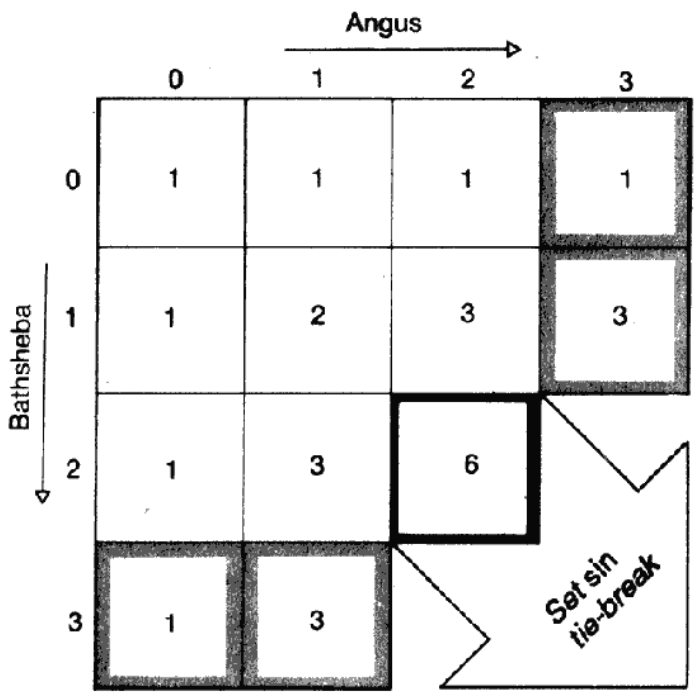
2.5. Tie-break



2.6. Set *con* tie-break



2.7. Set sin tie-break



Combinando todas las fórmulas usted puede, en principio, llegar a una expresión explícita para la probabilidad de ganar un *match* de tenis. He indicado cómo hacerlo con las flechas del recuadro 2.1: sustituya p por la expresión del recuadro que está en la cola de la flecha, y sustituya q por uno menos esto. En realidad no llevé a cabo todo el procedimiento, porque el resultado sería *enorme.* Cada p o q de una fórmula se transforma en una expresión total a partir de la fórmula anterior, y las complicaciones son anonadantes.

Recuadro 2.1 *Game, set* y *match:* probabilidades de ganar

Game

$p = \mathrm{P}\,(point),\ q = 1 - p$

$$p^4 + 4p^4q + \frac{10p^4q^2}{1-2pq}$$

Tie-break

$p = \mathrm{P}\,(point),\ q = 1 - p$

$$p^7 + 7p^7q + 28p^7q^2 + 84p^7q^3 + 210p^7q^4 + \frac{462p^7q^5}{1-2pq}$$

Set con *tie-break*

$p = \mathrm{P}\,(game),\ q = 1 - p$

$$p^6 + 6p^6q + 21p^6q^2 + 56p^6q^3 + 126p^6q^4 + 252p^7q^5 + 504p^6q^6\mathrm{P}\ (tie\text{-}break)$$

Set sin *tie-break*

$p = \mathrm{P}\,(game),\ q = 1 - p$

$$p^6 + 6p^6q + 21p^6q^2 + 56p^6q^3 + \frac{126p^6q^4}{1-2pq}$$

Match

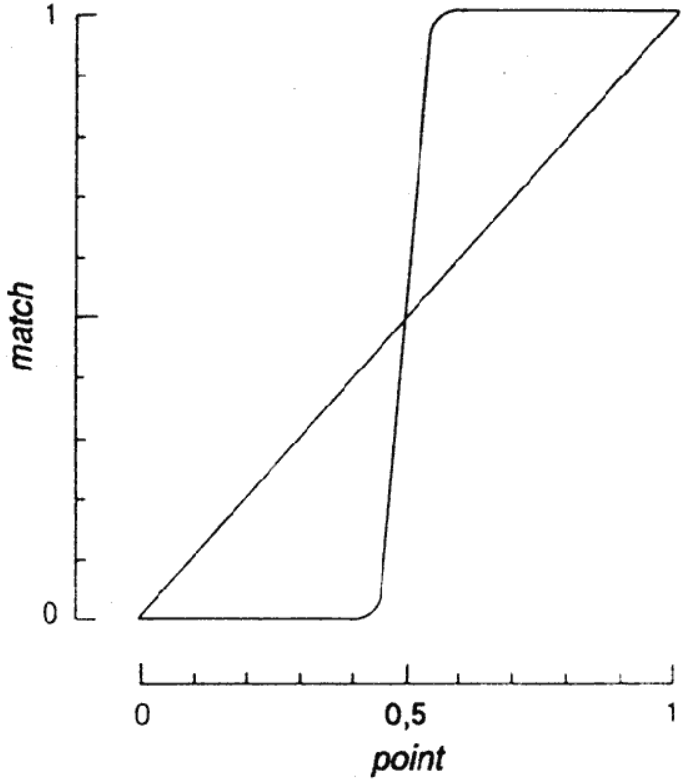
$p = \mathrm{P}(\ Set\ \mathrm{con}\ tie\text{-}break\ ),\ q = 1 - p$

$$p^3 + 3p^3q + 6p^2q^2\mathrm{P}\ (set\ \mathrm{sin}\ tie\text{-}break)$$

Sin embargo, usted puede sustituir valores de una fórmula a la siguiente, y he demostrado lo que ocurre en la figura 2.9. Esto brinda una tabla, y un gráfico, de la probabilidad de ganar un *match* en un

single masculino si su probabilidad de ganar cada punto es *p*.

Le mostré todo esto a Dennis la noche siguiente.



match

0

0,1

0,2

$0,3 \times 10^{-11}$

$0,4 \times 10^{-4}$

0,5

0,6995

0,7999

0,8999

0,9

1,0

2.9 Calculando la probabilidad de ganar.

—¿Bathsheba debería jugar *singles* masculinos? —objetó.

—Es muy liberada. Está pensando en cambiarse ese nombre por “Boris”. Ahora, cierra el pico y escucha. Observa que el gráfico es chato en cada extremo, pero se eleva abruptamente en el medio. Con

una probabilidad de más de 0,6 de ganar cada punto, tu probabilidad de ganar el *game* es de casi 1. *Las reglas del tenis favorecen al mejor jugador.*

Me miró por encima de la cerveza, perplejo.

—Pero está bien, ¿no crees? El mejor jugador merece la mejor probabilidad de ganar.

—Es cierto.

—Pero dices que todo esto depende de la suposición de que la probabilidad de ganar un punto sea siempre la misma. No es muy rea lista.

—Te refieres a la ventaja de servir.

—¡Correcto! El jugador que sirve tiene mucha mayor probabilidad de ganar el punto que el que recibe... exceptuando a un servidor, desde luego.

—Hmm.

—Muestra qué importante es servir.

—Podría rehacer los cálculos.

—No te molestes por mí. Recibí el mensaje. Puedes aplicar la teoría de las probabilidades al tenis. —Se prosternó burlonamente y apoyó la cabeza en el piso—. ¡Creo, creo!

Ignoré su parodia.

—Mm, pero podría ser interesante... El modo en que el puntaje amplifica las ventajas significa que cada jugador tiene una probabilidad cercana a 1 de ganar el *game* donde sirve... siempre que su probabilidad de ganar un punto supere el 1/2. Eso tiende a actuar de modo opuesto, lo cual nivela el juego. ¿Dónde está ese lápiz?

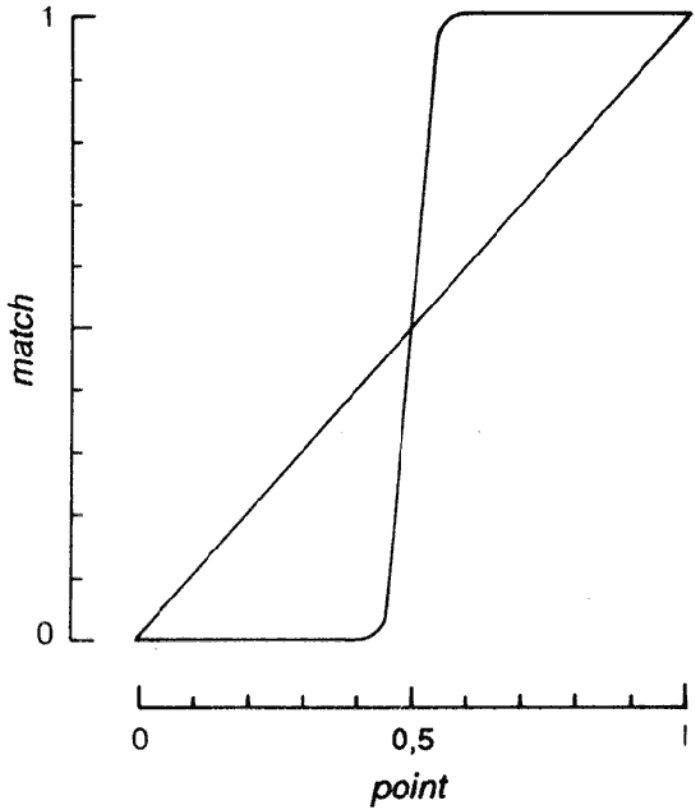
—Aguarda —dijo Dennis, reclinándose en la silla—. Antes de que cubras el mantel con fórmulas algebraicas, responde una cosa. Según esta teoría tuya, ¿qué probabilidad tienes de ganarme a mí?

—Bien —dije—, según mis cálculos, si tengo una probabilidad 1/3 de ganarte un punto, mi probabilidad de ganar un *match* es de 0,000 000 027, es decir una sobre treinta y siete millones.

—Yo dejaría la teoría tal como está. Para mí luce perfecta.

Soluciones

probabilidad de ganar



match point

0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

2.10. Calculando la probabilidad de ganar singles *femeninos.*

La probabilidad de ganar en un *single* femenino es $p^2 + 2p^2q$, donde p = P *(set* con *tie-break)* y $q = 1 - p$.

El gráfico que muestra cómo esto varía con la probabilidad p = P *(point)* aparece en la figura 2.10.

Otras lecturas

R. Hersh y R. J. Griego: “Brownian Motion and Potential Theory”, *Scientific American* (marzo 1969), págs. 66-74.

Mark Kac: “Probability”, *Mathematics in the Modern World ,* comp. Morris Kline, San Francisco, Freeman,1968.

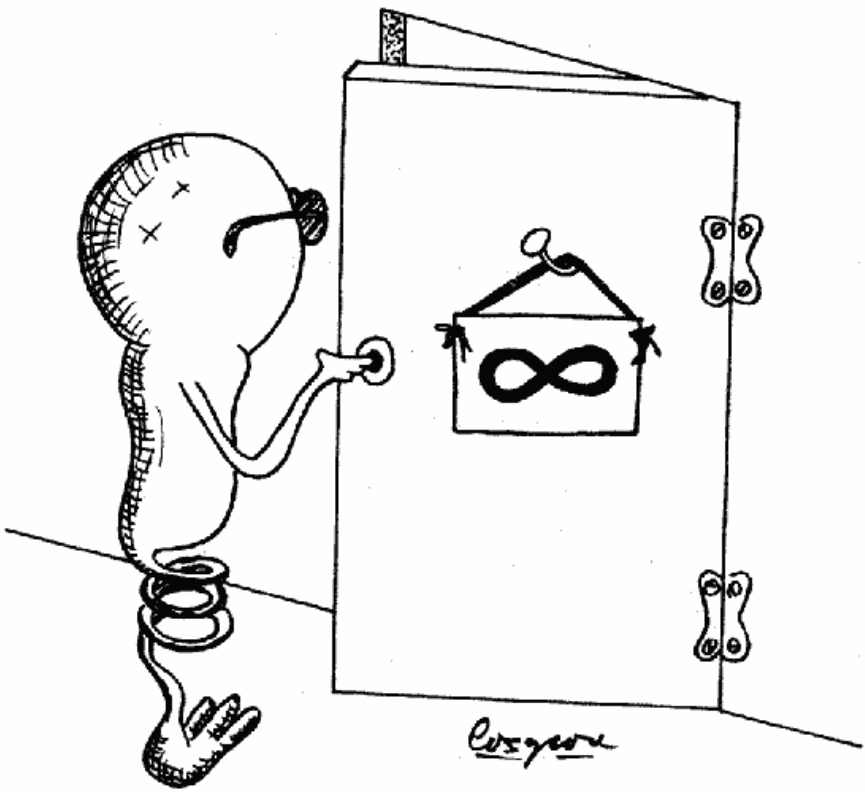
Morris Kline: *Mathematics in Western Culture,* Harmondsworth, Penguin, 1972.

A. N. Kolmogorov: “The Theory of Probability”, *Mathematics: its Content, Methods and Meaning,* comp. A. D. Aleksandrov, Boston, MIT Press, 1963.

Frederick Pohl: *Drunkard’s Walk,* Londres, Gollancz, 1961.

Warren Weaver: *Lady Luck,* Nueva York, Dover, 1963.

3. El laboratorio de infinormática



Sonó el teléfono. Era Philippe Boulanger, director de *Pour la Science*.

—El tema especial de este mes son los grandes sistemas de informática. Quiero que escribas algo sobre eso para "Visions Mathématiques".

—¡Eso es para la columna de informática! —protesté—. Mi columna es para personas que no tienen ordenadores, no quieren ordenadores, que quizás *odien* los ordenadores...

—Sé que puedes hacerlo --dijo—. El plazo de entrega vence este jueves. —Y colgó.

Empecé a sentir un sudor frío rayano en el pánico. Necesitaba

ayuda, y deprisa. Tenía que acudir a un experto. Un rayo de luz... Una rápida visita a mi viejo amigo el doctor Zebedee J. J. Bunnydew, del principal centro de investigación de la Salmigondis Corporation en la ciudad de Kluzmopodion. No es tan fácil como parece, porque Kluzmopodion está en el planeta Ombilicus, a mil millones de años luz (y algunos metros) de la Tierra, en la dirección del ojo derecho de la constelación de Orión. Sin embargo, hay una distorsión espaciotemporal en un rincón de mi jardín (detrás del frambueso) que conduce directamente a Ombilicus. Así fue como había conocido al doctor Bunnydew: caí en la distorsión mientras desbrozaba la maleza. Cerciorándome de que los vecinos no observaran, pasé por la distorsión, y luego conseguí un aventón hasta Salmigondis Corporation en un vehículo Brontosaurio.

—¿Grandes sistemas informáticos? —dijo Bunnydew—. Puedo decirte mucho sobre eso, pero no puedo.

—¿Puedes pero no puedes?

—Secreto máximo. Tarea gubernamental clasificada. —Se me acercó para susurrarme—: El contrato de la Guerra del Cuásar. Es tan secreto que ni siquiera puedo hablar conmigo mismo. Pero tienes suerte. Tengo algunas ideas tan alocadas que aún no hablé sobre ellas con la gente de seguridad. ¿Grandes sistemas informáticos? No los hay más grandes de los que yo planeo, te lo aseguro. ¡Sígueme!

Me condujo por un corredor hasta una habitación diminuta. Había un letrero pegado a la puerta, con un solo símbolo: Tal vez era la habitación 8 y el letrero se había caído. Pero no lo creía. Había visto ese símbolo en alguna parte.

—Este —dijo Bunnydew con tono conspiratorio— es el laboratorio de infinormática.

¿Infinorm...? ¡Claro! ¡Era el símbolo de infinitud! ¿Pero qué demonios era infinormática? Pronto lo averiguaría.

Entramos. Bunnydew abrió una gaveta y extrajo una pieza de plástico negro de 5 mm de anchura. Había una doble hilera de alfileres de metal en el costado. Pude ver hasta un metro de esa cosa; luego desaparecía dentro de la gaveta.

—Parece un chip de circuitos integrados —dije—. Pero más largo.

—Mucho más largo —dijo Bunnydew—. Estás mirando un extremo del BIL, el chip Lineal Infinito Bunnydew para memoria RAM, una memoria para ordenadores con una cantidad infinita de posiciones, cada cual capaz de almacenar un dígito binario de forma eléctrica. Si la electricidad está presente en una posición dada, el dígito es 1, de lo contrario es 0. Las secuencias de 0 y 1 pueden codificar cualquier tipo de información. Un BILRAM puede almacenar no sólo toda la

información del universo, sino que puede almacenar una cantidad infinita de información.

—Entiendo por qué dejas la mayor parte en la gaveta.

—Bien, sí, es difícil de manejar. Tengo que guardarla en un campo compresor infinito pandimensional, pero no te preocupes por los detalles técnicos.

—¿Las señales eléctricas no tardan mucho en llegar de un extremo al otro?

—En rigor sólo tiene un extremo, el que tengo en la mano. El otro "extremo" continúa eternamente. Pero sí, tardan infinitamente mucho.

Sugerí que esto no era muy práctico. Bunnydew estuvo de acuerdo.

—Pero el BILRAM sigue siendo muy interesante. No necesita fuente de alimentación.

No le creí.

—¿Y qué hay de la Ley de la Conservación de la Energía?

—No se aplica a un sistema infinito —dijo airosamente—. Permíteme explicar. El BILRAM está hecho de silicio, que es un semiconductor. Sus posiciones de memoria funcionan eléctricamente. La energía eléctrica se obtiene de los electrones. Ahora bien, si sacas un electrón de un semiconductor, tienes lo que los físicos llaman un agujero.

"Supongamos que empiezo con un BILRAM donde todas las posiciones de memoria contienen un cero binario: no hay electrones. Tampoco agujeros: neutro. ¿Entiendes?

—Claro.

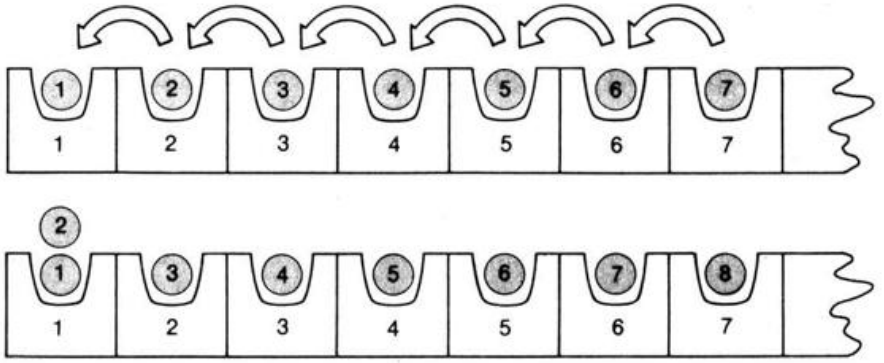
—Bien. Ahora, creo un electrón en la posición 1 pidiéndolo prestado a la posición 2.

—¡Pero eso deja un agujero en la posición 2! ¡La energía se conserva!

—No te apresures, muchacho. Porque también saco un electrón de la posición 3 y lo pongo en la posición 2. Eso llena el agujero de la posición 2, pero desde luego crea uno en la posición 3. Lo soluciono pidiendo un electrón a la posición 4. Supongamos que pido electrones infinitas veces. Por cada entero $n = 2, 3, \ldots$ saco un electrón de la posición n y lo pongo en la posición $n - 1$ (figura 3.1). ¿Qué obtengo?

Pensé en ello.

—Tienes un electrón en la posición 1. Todas las demás posiciones pierden un electrón pero ganan otro... así que permanecen neutrales. Pero desde luego tienes un agujero en el infinito.

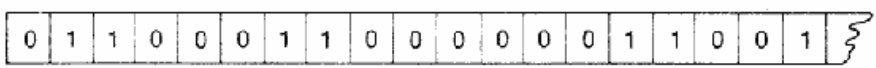


3.1. Los pares de agujeros de electrones son eléctricamente neutros. Si los electrones (negros) se desplazan por un sistema infinito de agujeros, es posible crear un electrón libre a partir de la nada, en violación de la Ley de Conservación de la Energía.

—Pues no. El infinito nunca entra en ello. Cada posición corresponde a un valor finito de *n*. No, pongo un electrón en la posición 1 mientras todo lo demás termina tal como empezó. Y eso no es todo. Imagina un BILRAM totalmente lleno con una cantidad infinita de información...

—¿Eh? ¿Cómo puedes tener una cantidad infinita de información?

—¿Qué te parece una lista completa de los números primos? ¡Claro que puedes tener una cantidad infinita de información! Aquí en el laboratorio tengo un BILRAM lleno... se llama el archivo galileo (figura 3.2). ¡Apuesto a que no adivinas qué hay en él! De todos modos, supongamos que tienes un BILRAM totalmente lleno, y quieres añadirle más información. ¿Qué haces?



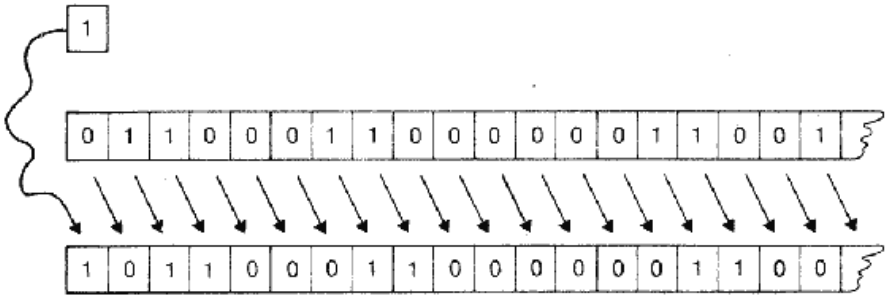
3.2. El comienzo del archivo GALILEO, que contiene una cantidad infinita de información. ¿Qué almacena el archivo y cómo está codificada la información?

—¡No puedes hacer nada! Si el chip está lleno, no hay más espacio.

—Lo hay en un chip infinito. Olvida los electrones, y piensa en el modo en que se movieron los agujeros.

Pensé: Supongamos que tienes una lista de dígitos binarios que se lee 101100011000... pero has olvidado el 1 inicial. Los incluiste todos en un BILRAM, en orden, 01100011000... no hay espacio para el 1 faltante en el otro extremo, porque no hay otro extremo. ¡Desde luego! ¿Adónde fueron los agujeros? ¡El truco del electrón a la inversa!

—Mueves todo una posición hacia arriba —dije—. La información de la posición 1 va a 2, la de 2 va a 3, y así sucesivamente... Eso deja la posición 1 libre para la nueva información. (Figura 3.3)



3.3. Para añadir un dígito 1 al principio del archivo GALILEO lleno, sólo desplazamos cada dígito un lugar hacia arriba.

—Correcto. Así que infinito más uno es infinito. —Escribió "$\infty + 1 = \infty$" en una libreta—. Una de las muchas paradojas del infinito. El todo puede ser igual que la parte. Pero continuemos. ¿Qué ocurre si tenemos varios datos nuevos para añadir?

—Mueves todo hacia arriba la cantidad necesaria de veces.

—¡Excelente! Y esto te demuestra que si sumas un número finito al infinito, tienes de nuevo infinito, ¿sí?

—Supongo que sí... Todo depende de lo que quieras decir con "sumar".

—Empiezas a ser cauto con la infinitud. Me gusta eso. Sin duda ahora puedes deducir cómo sumar una cantidad infinita de datos nuevos a un BILRAM entero.

—Lo mueves para arriba una cantidad infinita de... Oh no, todo se desarma en el extremo de la infinitud.

—Pero la infinitud no tiene extremo.

—Aun así —dije con empecinamiento—. Sin duda. Aunque no haya un extremo en el cual desarmarse. Si mueves la información una cantidad infinita de veces, la pierdes toda.

—Correcto.

—Entonces no se puede hacer.

Zebedee J. J. Bunnydew rió.

—¿Conque infinito más infinito te da un infinito más grande?

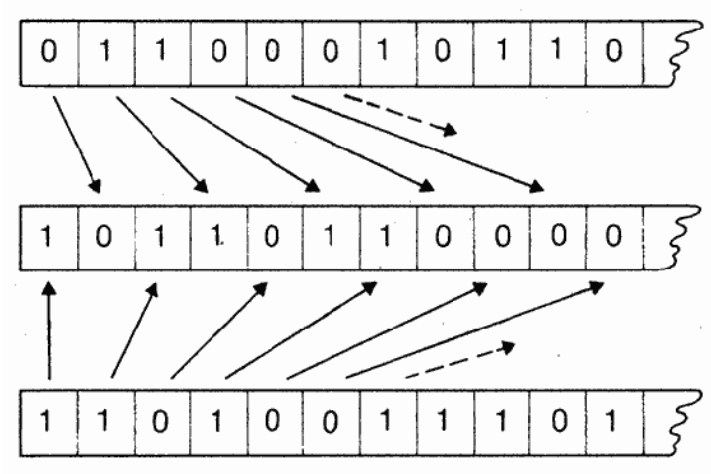
—Sí. ¡No! ¡Estoy confundido! El infinito es lo más grande que hay. No puedes tener infinitos de dos tamaños...

Meneó la cabeza tristemente.

—Te equivocas de nuevo. Tu matemático terrestre Georg Turner se revolvería en la tumba. Pero eso es irrelevante. Para añadir una cantidad infinita de información a un BILRAM lleno, sólo mueves el contenido de la posición 2 a la posición $2n$. Eso libera todas las posiciones impares... infinitas.

—¡Es como barajar un mazo de naipes! —exclamé excitado.

(Figura 3.4)



3.4. Al barajar dos listas infinitas creamos una sola lista del mismo tamaño.

—Excelente imagen, amigo mío. Sí... si coges dos mazos infinitos de naipes y los barajas, obtienes un solo mazo, del mismo tamaño que cada uno de los dos con que empezaste. Así que $\infty + \infty = \infty$, como cabe esperar.

"E incluso puedes acomodar una cantidad infinita de conjuntos de información infinita. ¡Empiezas a ver las virtudes de mi BILRAM! Una memoria que nunca se llena; o mejor dicho, si se llena sólo desplazas el contenido y creas un espacio nuevo a partir de nada.

Señalé que todo esto tardaba un tiempo infinito en ocurrir.

—Tú me preguntaste por sistemas informáticos *grandes* —replicó Bunnydew—. No *rápidos*. —Sonrió—. Desde luego, si yo pudiera efectuar el primer desplazamiento en un segundo, el siguiente en medio segundo, el tercero en un cuarto de segundo, y así sucesivamente, la tarea quedaría concluida en dos segundos.

—Ridículo. No puedes superar la velocidad de la luz.

Me miró socarronamente.

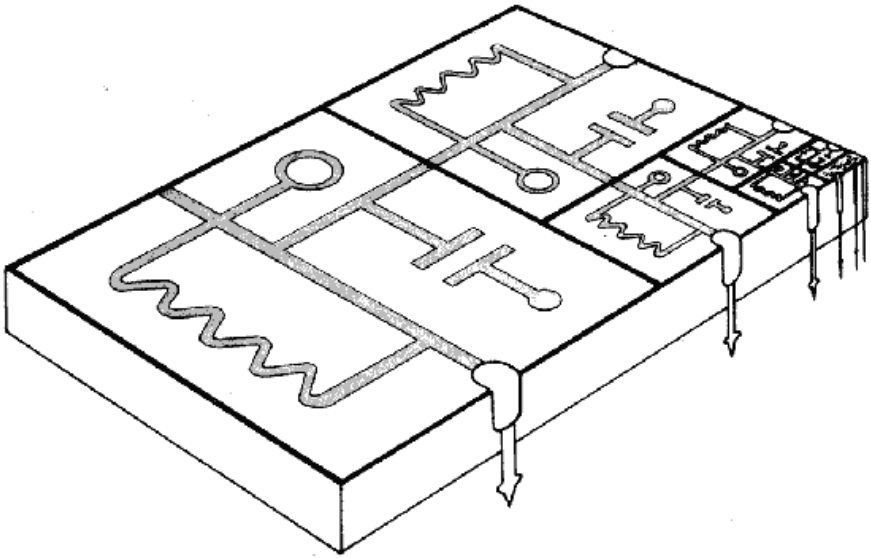
—¿Entonces cómo llegaste aquí, a mil millones de años luz (más algunos metros) de la Tierra, sin traer siquiera un emparedado para comer en el viaje?

Me sonrojé.

—Bien, excepto por las distorsiones espaciotemporales...

—Por mencionar un solo método. Estoy trabajando en un diseño mejorado de memoria RAM infinita que evita ese problema. —Abrió otra gaveta y sacó un boceto (Figura 3.5)—. El chip Bunnydew Dorado de memoria RAM —dijo con orgullo—. Déjame recordarte los dos principios básicos de la manufacturación de chips. Uno: repetición. Dos: miniaturización fotográfica. Notarás que el diseño consiste en

infinitas repeticiones de la misma unidad básica, pero continuamente reducidas en tamaño. La unidad básica, desde luego, es una posición de memoria.



35 El chip Bunnydew Dorado de memoria RAM, donde la misma unidad de memoria se repite con infinita frecuencia.

Zebedee J. J. Bunnydew había creado una nueva cámara de *zoom* infinito que permitía reducir una fotografía a cualquier tamaño, por pequeño que fuera. El circuito básico de memoria ocupaba un cuadrado. Había resuelto el problema de introducir una cantidad infinita de cuadrados en un chip rectangular usando un rectángulo cuyos lados estaban en la áurea proporción $<p$. Si se extrae un cuadrado de semejante rectángulo, el rectángulo restante tiene exactamente la misma forma que el original. El valor exacto de φ se puede calcular a partir de esto, y es $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618034...$

—Este diseño —dijo con orgullo Bunnydew— garantiza que, si se desplaza una posición de memoria, el resto del chip es exactamente igual a la totalidad, pero reducido en tamaño. Mis nuevas técnicas de fotografía recursiva... Epa, son ultrasecretas... Olvida que lo mencioné. De todos modos, como el tamaño total es infinito, la velocidad de la luz ya no es un factor limitativo. Además, es el único chip existente que se puede reducir tanto como desees... y por lo tanto con la velocidad que desees... con sólo cortarle partes.

—Impresionante —admití. Me asaltó una duda—. ¿Funciona? ¿Qué ocurre cuando las unidades alcanzan un tamaño inferior al del átomo?

—También encojo los átomos.

—Se me encoge la cabeza —dije—. Uno de nosotros necesita un psiquiatra.

—Admito que he tenido problemas al hacer una emulsión fotográfica de resolución infinita. Pero eventualmente hallaré el modo. —Guardó el diseño en la gaveta y la cerró—. Y cuando lo haga, también podré concretar el diseño de un reloj digital de precisión infinita que muestre la hora correcta hasta una cantidad infinita de posiciones decimales usando un visor de cristal líquido de rectángulo áureo que es casi...

Para aplacarlo, traté de distraerlo.

—Conozco una adivinanza sobre máquinas infinitas —dije—. Imagina un interruptor de luz. Lo enciendes. Al cabo de un segundo lo apagas. Al cabo de medio segundo lo enciendes de nuevo. Al cabo de otro cuarto de segundo lo apagas, y así sucesivamente. Apagas y enciendes, cada vez más deprisa, cada vez restando la mitad del tiempo anterior. Al cabo de dos segundos, has encendido y apagado una infinita cantidad de veces. ¿Comprendes?

—Comprendo.

—La pregunta es: al cabo de esos dos segundos, ¿la luz está encendida o apagada?

La cara de Bunnydew cobró un aire misterioso. Titubeó.

—Apagada —dijo al fin.

—¿Por qué?

—Porque reventarás el fusible si enciendes y apagas a tal velocidad.

Intenté darle un puntapié, pero me esquivó.

—¡Eh! —dijo, ocultándose detrás de un banco de laboratorio—.

Me acabas de dar una idea maravillosa. Los ordenadores son sólo combinaciones de interruptores. ¡Podría diseñar un ordenador como ese interruptor de luz! BUNNYRAC, el Ordenador de Aceleración Rápida Bunnydew. ¿Entiendes cuán potente sería un ordenador si pudieras efectuar una cantidad infinita de operaciones en un tiempo finito?

—Bien, más potente que un Cray, sin duda...

—Nombra un famoso problema matemático irresuelto. Cualquiera servirá.

—Mm. La conjetura de Goldbach. Cada número par es una suma de dos primos. Propuesto por Christian Goldbach en una carta a Leonhard Euler el 7 de junio de 1742. Aún no está resuelto.

—Bien. En BUNNYRAC, puedes demostrar que la conjetura de Goldbach es atinada o errónea por ensayo y error. En el primer segundo, pruebas todos los modos posibles de representar 2 como una suma de dos primos, y desde luego obtienes $2 = 1 + 1$.

—Pero 1 no es un número primo.

—Ahora no lo consideran como tal, pero en tiempos de Goldbach sí. De lo contrario su conjetura habría sido obviamente falsa. Deja de buscarle tres pies lógicos al gato. ¿Dónde estaba? Oh, sí... en el primer segundo pruebas el número 2 para ver si es una suma de primos. En el próximo medio segundo, pruebas el número 4. En el próximo cuarto de segundo, pruebas el número 6; en el próximo octavo de segundo, pruebas el 8, y así sucesivamente. Al cabo de dos segundos, has probado todos los números pares posibles. O pruebas la conjetura de Goldbach, o encuentras un ejemplo que demuestra su falsedad. Un método infalible.

—¡Vaya! —Ahora yo estaba entusiasmado—. También podrías resolver otros problemas. El Último Teorema de Fermat: una potencia enésima perfecta no puede ser la suma de otras dos potencias enésimas perfectas, pues toda $n \geq 3$. Puedes verificar cada n por tumo, cada vez más deprisa. Puedes verificar la hipótesis de Riemann calculando todos los infinitos ceros de la función zeta. Puedes averiguar si hay o no infinitos primos gemelos, números primos que difieren por dos, como 19 y 17, verificando cada par posible. Puedes...

—...volverte más ambicioso. Aún no has captado cuán grande es la infinitud. Con BUNNYRAC puedes verificar todo teorema matemático posible en dos segundos.

—¿Qué?

Bunnydew suspiró.

—Para demostrar teoremas, partes de una pequeña cantidad de afirmaciones básicas —axiomas, cosas que das por ciertas— y aplicas una pequeña cantidad de reglas de deducción. En eso consiste una de mostración. Hay infinitas demostraciones posibles, y por ende i ni mi tos teoremas posibles; pero sólo hay una cantidad finita de teoremas cuya demostración tenga una longitud dada. Eso significa que puedes arreglar todas las demostraciones posibles en orden y verificarlas una por una, cada vez más deprisa, en un tiempo finito.

—Eso es realmente extravagante —dije—. y aterrador. ¡Dejaría a los matemáticos sin trabajo! —Supe lo que debió de sentir Pandora cuando abrió esa caja...

Zebedee J. J. Bunnydew salió de atrás del banco y me sentó en un taburete.

—No te preocupes, aún tenemos que resolver algunos contratiempos. ¿Cuánto crees que tardará un ser humano en *leer* la lista de todos los teoremas posibles si BUNNYRAC imprime una?

Soluciones

¿Qué contiene el archivo GALILEO

0110001100000011001...

y cómo está codificada la información? El nombre es una clave, según explicaré en seguida. La respuesta es “una lista de todos los cuadrados”. Los cuadrados están en binario, y la codificación es la siguiente. Una secuencia de *n* cantidad de ceros, terminada en 1, significa que “los próximos dígitos n son el próximo cuadrado de la lista”. Luego viene el cuadrado; después de lo cual otra serie de ceros terminados en 1 indica la longitud del próximo cuadrado. (Estas secuencias 00 ... 01 se necesitan para que usted sepa dónde empieza y termina determinado ítem de la lista.) Así el código se decodifica:

01 sigue un número de 1 dígito
1 es 1
0001 sigue un número de 3 dígitos
100 es 4 (en binario)
00001 sigue un número de 4 dígitos
1001 es 9 (en binario)

y así sucesivamente.

¿El nombre? En los *Discursos y demostraciones matemáticas* de Galileo (1638) el sagaz Salviati señala que “a cada cuadrado corresponde su raíz”, es decir, hay exactamente igual cantidad de cuadrados perfectos que de números enteros... aunque la mayoría de los números enteros no sean cuadrados. Otra paradoja de la infinitud.

Otras lecturas

Michael Guillen: *Bridges to Infinity,* Londres, Rider, 1983.

Edward Kasner y James Newman: *Mathematics and the Imagination,* Londres, Bell, 1961.

Eugene P. Northrop: *Riddles in Mathematics,* Harmondsworth, Penguin, 1960.

Ian Stewart: *The Problems of Mathematics,* Oxford, Oxford University Press, 1987.

Leo Zippin: *Uses of Infinity,* Washington, DC, Mathematical Association of America, 1962.

4. El Ourotoro autovoraz

Una serpiente mítica del antiguo Egipto.
Un símbolo alquímico.
El descubrimiento del anillo de benceno por Kekulé.
Una teoría india del ritmo, con mil años de antigüedad.
Los siete puentes de Königsberg.
La teoría de los circuitos telefónicos.
Mapas de Venus hechos por radar.

¿Ítems escogidos al azar? En absoluto. Todos tienen algo en común, pero usted nunca adivinará qué.

El hilo común es una palabra sánscrita que no significa nada: *yamátárájabhánasalagám.*

La curiosa unidad de estas ideas fue descubierta en 1960 por Sherman K. Stein, un matemático de la Universidad de California en Davis. Buena parte de la historia que contaré se basa en el capítulo 8 de su libro *Mathematics: the Man-Made Universe.* Como veremos, esta historia tiene sus vueltas.

La serpiente mítica del antiguo Egipto es Ouroboros, que se pone la cola en la boca y continuamente se devora a sí misma. Fue usada como símbolo alquímico en la Edad Media. El químico Friedrich Kekulé inventó su famosa estructura anular para la molécula de benceno después de soñar con Ouroboros. Hay un concepto similar de "comerse la cola" en las teorías musicales de la antigua India, a través de la palabra sánscrita mencionada. Esta palabra plantea un problema matemático que se puede resolver aplicando ideas utilizadas por Leonhard Euler para resolver el famoso problema de los puentes de Königsberg. Los resultados tienen aplicaciones a la transmisión telefónica y a los métodos usados para cartografiar la superficie de Venus desde la Tierra usando un radar sensible.

Es una historia curiosa.

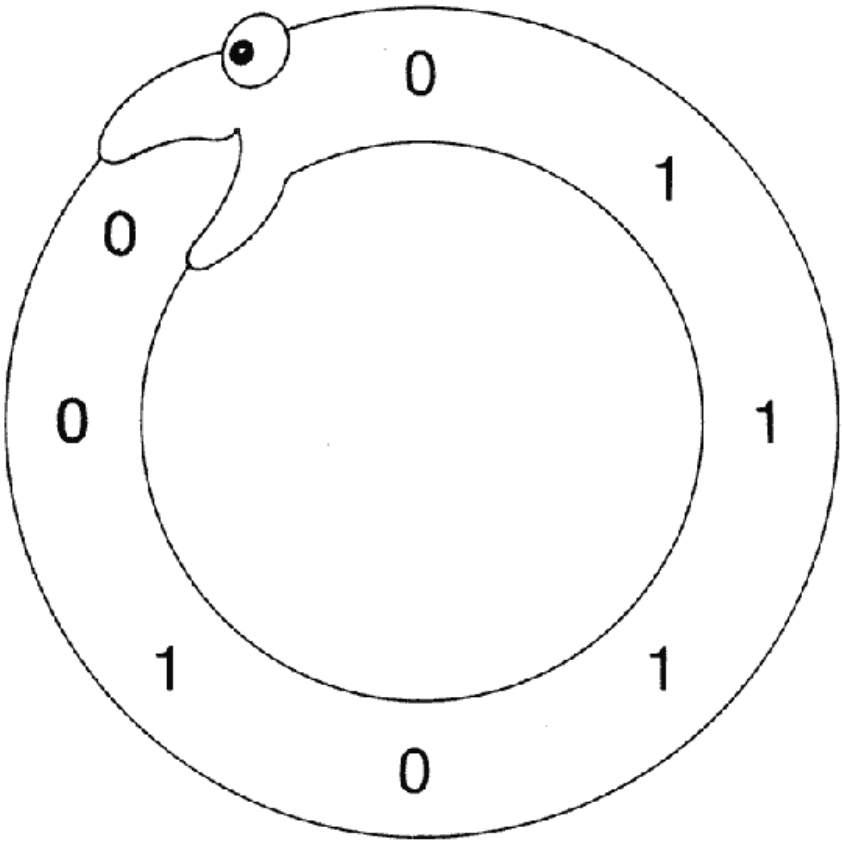
Y contiene algunas delicias de matemática recreativa, las cuales plantean muchos problemas irresueltos adecuados para el aficionado.

Stein descubrió la existencia de *yamátárájabhánasalagám* gracias a un compositor, George Perle, quien le dijo que era una palabra inventada como regla mnemotécnica para los ritmos. Lo importante no son las vocales y las consonantes, sino el énfasis puesto en las sílabas. Perle lo explicaba de esta manera: "Al pronunciar la palabra se abarcan todos los tríos posibles de ritmos breves y largos. Las tres primeras sílabas, *ya má tá,* tienen ritmo breve, largo, largo. De la segunda a la cuarta tenemos *má tá rá*: largo, largo, largo. Y así sucesivamente". Hay ocho tríos de ritmos, largos o breves; se puede verificar que cada cual aparece exactamente una vez en esa palabra inventada.

Stein redujo la palabra a su contenido matemático usando 0 para breves y 1 para largos, y así la transformó en 0111010001. "Tras mirar un rato la serie simplificada, reparé en algo encantador. Los dos primeros dígitos eran iguales a los dos últimos; si yo formaba un rizo con la serie, luciría como una serpiente que se mordía la cola" (Figura 4.1). Llamó al resultado una "rueda de memoria", porque se puede comenzar en cualquier posición, y desplazando un espacio por vez generar todos los tríos posibles de dígitos 0 y 1:

0.

0
1
0
0
0
0
0
0



4.1. Un anillo Ouroboros ¡fue contiene todos los tríos de dígitos 0 y 1.

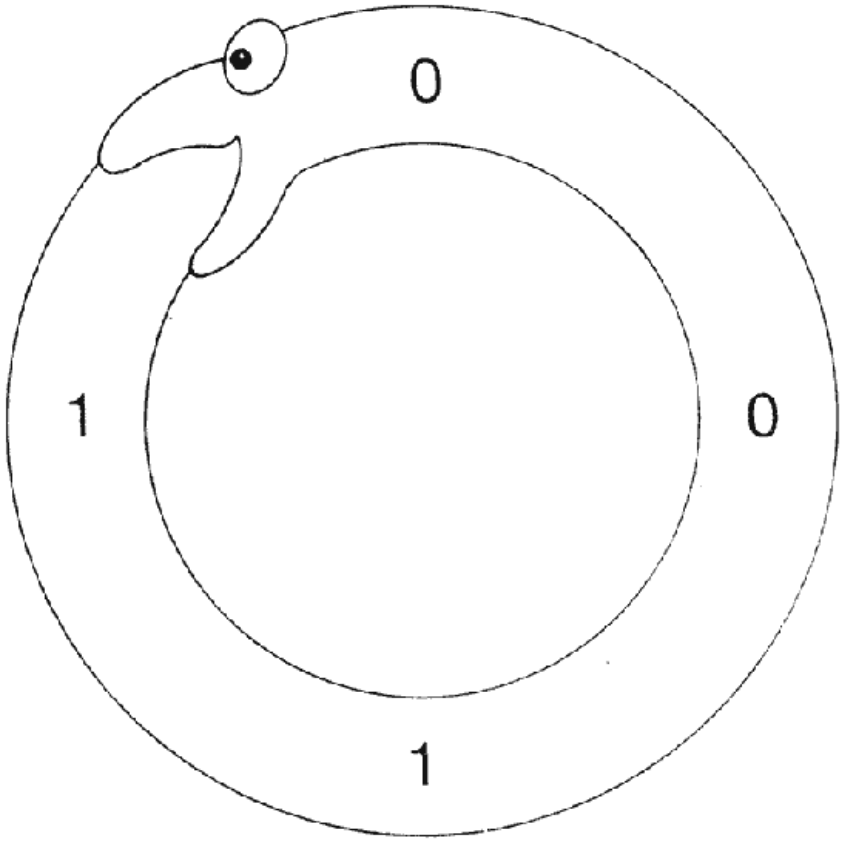
Usemos un nombre más pomposo, y denominémoslo anillo Ouroboros.

Cualquier matemático alerta empezaría a hacer preguntas. ¿Hay anillos Ouroboros para cuartetos de ceros y unos? ¿Quintetos? ¿Conjuntos de *n* miembros? ¿Y qué hay con los ceros, unos y dos? Vastas generalizaciones cruzan la fértil mente del matemático.

Luego surge una pregunta más simple. ¿Qué hay con los *pares?* ¿Se puede encontrar una secuencia de longitud cuatro, consistente en sólo ceros y unos, que escrita en un círculo contenga los cuatro pares

posibles 00, 01, 10, 11? Inténtelo. Una vez que haya resuelto eso —que es fácil— trate de hallar un anillo Ouroboros que contenga los dieciséis cuartetos. Luego continúe leyendo.

Sí, hay un anillo Ouroboros para los pares: 0011 (figura 4.2). Es muy singular: todas las demás soluciones se pueden encontrar haciéndolo rotar para obtener 0110,1100,1001, que lucen iguales cuando uno las dibuja en una serpiente que se devora a sí misma.



4.2 El singular anillo Ouroboros que contiene todos los pares de dígitos 0 y 1.

Stein encontró una para los cuartetos:

1111000010100110.

Para entonces estaba convencido de que habría anillos Ouroboros para conjuntos con una cantidad *n* de ceros y unos. Intentó demostrarlo, pero su ingeniosa idea condujo a un problema matemático irresuelto. Luego descubrió que I. J. Good se había topado con ese interrogante cuando investigaba teoría numérica en 1946... y lo había resuelto.

El principal interés de Good consistía en hallar una secuencia

infinita de ceros y unos donde cada sexteto posible surgiera con la misma frecuencia, pero su método era más general. Usó una artimaña para transformar este problema en un problema ya resuelto en 1735 por Leonhard Euler, el matemático más prolífico de la historia. El problema de Euler es una de las fuentes tempranas de la topología. Aunque es muy famoso, lo reproduciré aquí. En cuanto a la historia del sistema caminero de Königsberg, también importante para nosotros, es menos conocida (probablemente porque acabo de inventarla).

"En la ciudad de Königsberg", escribió Euler, "hay una isla llamada Kneiphof, alrededor de la cual circulan dos ramificaciones del río Pregel. Hay siete puentes (figura 4.3 [a]). La pregunta es si una persona puede seguir un circuito tal que cruce cada uno de estos puentes una vez, pero no más de una vez."

Tal vez usted desee experimentar. Pronto pensará que no hay solución.

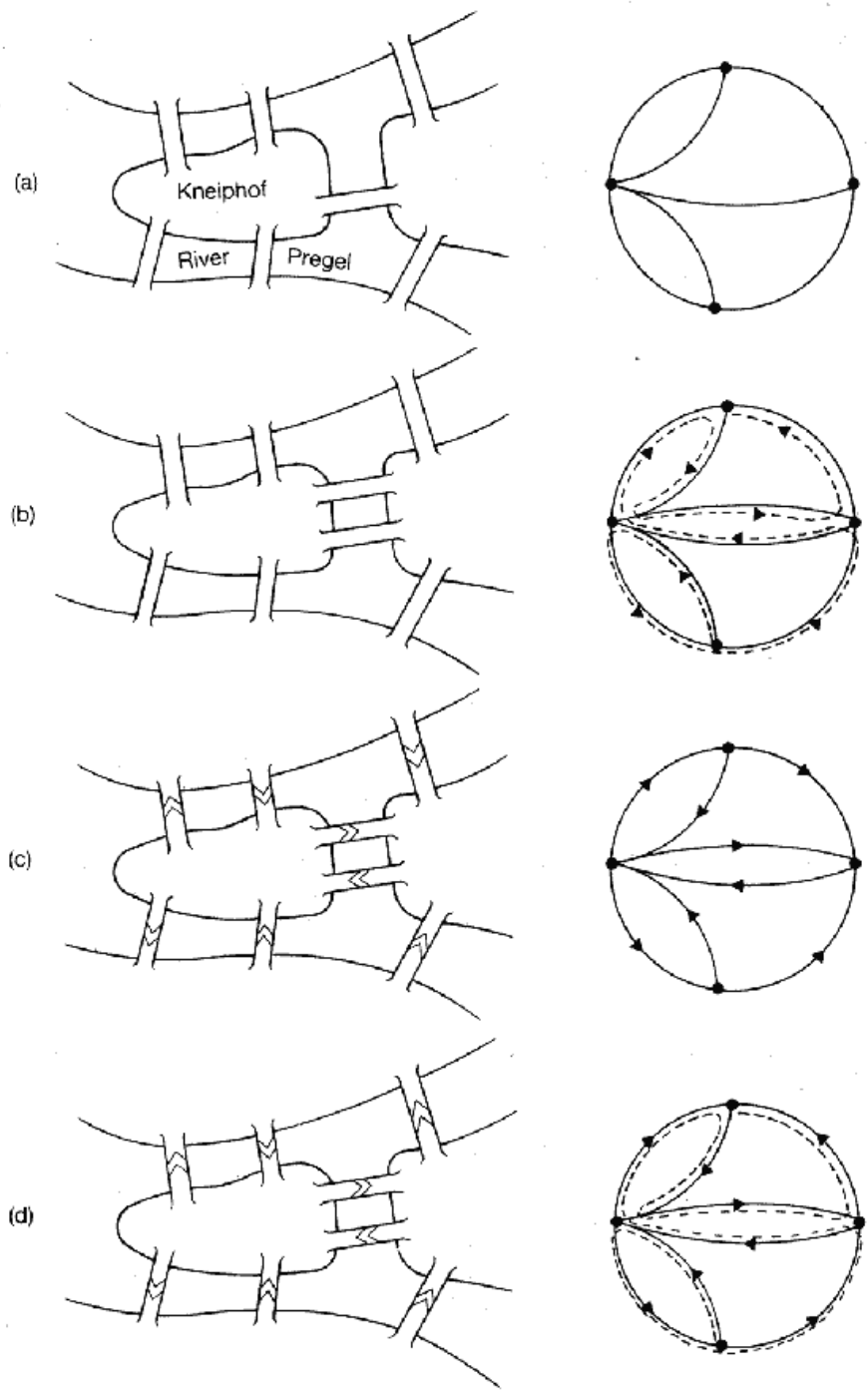
Euler fue más lejos. *Demostró* que no hay solución, y descubrió condiciones generales para la existencia de soluciones para cualquier problema del mismo tipo.

Para ello, reemplazó cada masa terrestre por un punto, y cada puente por una línea que conectaba los puntos apropiados, obteniendo un gráfico que refleja con precisión la topología de las conexiones. El gráfico se muestra a la derecha de la figura, arriba. El problema es pues: ¿se puede trazar en el gráfico un circuito que pase exactamente una vez a lo largo de cada borde?

Bien, dijo Euler, supongamos que existe tal circuito. Excepto en los dos extremos, cada vez que llega a un punto desde una dirección, abandona otro. Por lo tanto la cantidad total de bordes que tocan cada punto es par, excepto por los dos extremos, donde podría ser impar.

Sin embargo, para los puentes, estos números son 3, 3, 3 y 5: todos nones. Por lo tanto no es posible recorrer ese circuito.

Esto plantea una condición necesaria para un circuito completo. A lo sumo dos puntos deben encontrarse en un número impar de bordes, si hay alguno. Si no los hay, puede comenzar en cualquier parte; más aun, se puede cerrar en un rizo que comience y termine en el mismo lugar. La demostración no es excesivamente difícil, pero requiere cierta organización, así que no la daré.



43 (a) El problema de Euler de los puentes de Königsberg: mapa caminero, y gráfico correspondiente, (b) Tras construir la carretera de Kneiphof. (c) Cuando se introdujo el sistema unidireccional, (d) Cómo se modificó el sistema unidireccional aplicando el teorema de Euler.

Algunos años después del trabajo de Euler, el tráfico en Königsberg se volvió tan denso que los padres de la ciudad construyeron la carretera de Kneiphof (figura 4.3 [b]). Los números de líneas que cruzaban cada punto eran entonces 6, 3, 3, 4. Dos de ellos son nones; así, mediante el teorema de Euler, es posible hallar un modo de recorrer el circuito. Debe comenzar en la margen norte y terminar en la margen sur, o viceversa. Dicho circuito está mostrado allí. Pronto, en vez de caminar por la famosa ruta, los buenos ciudadanos de Königsberg comenzaron a recorrerla con vehículos todos los domingos después del almuerzo.

En consecuencia, el tráfico empeoró, y los desesperados padres de la ciudad introdujeron el sistema unidireccional de Königsberg (figura 4.3[c]). Varios ciudadanos eminentes fueron multados por seguir el trayecto indicado en la figura 4.3(b), pues no notaron que iba en la dirección equivocada en la última calle. Empezaron a preguntarse si era posible realizar ese circuito legalmente, y descubrieron que Euler también había pensado en ello.

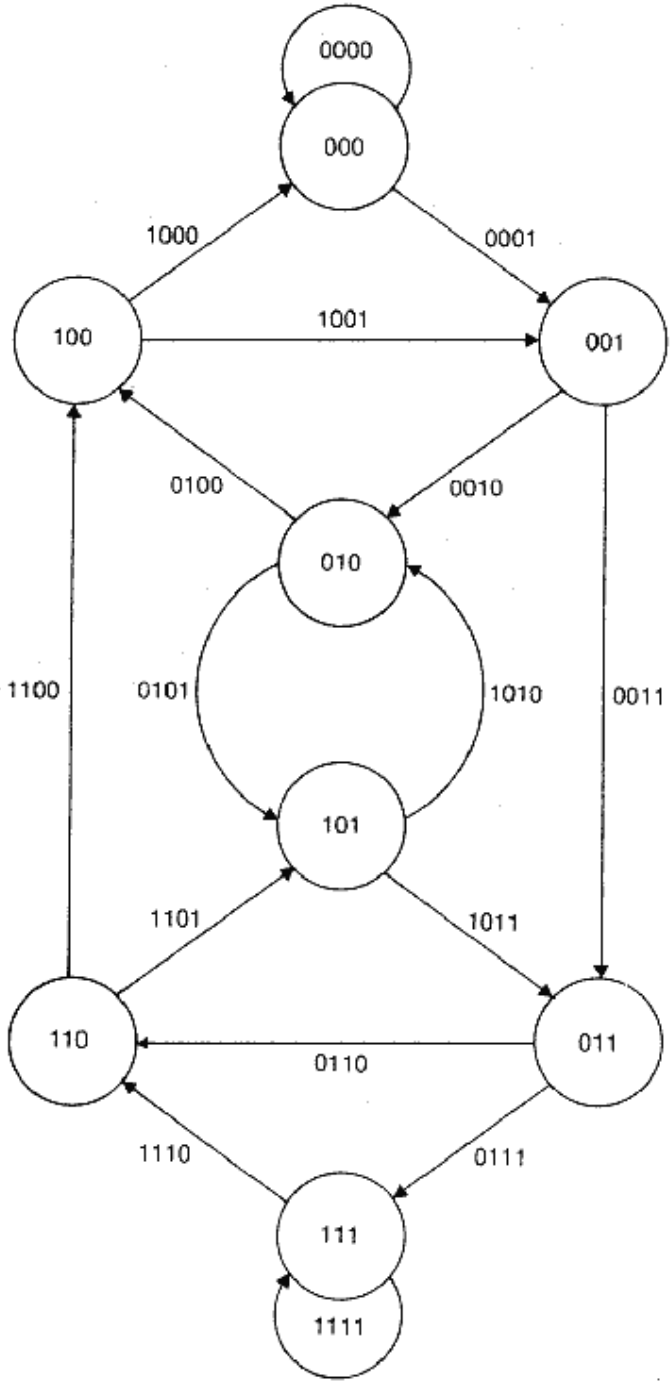
Un sistema unidireccional se corresponde con un gráfico *dirigido* donde cada borde está marcado con una flecha, y se debe atravesar en la dirección de la flecha. Una vez más, Euler preguntó qué ocurriría si existía un circuito. En cada punto que no estuviera en los extremos el circuito debía entrar y luego salir. Así la cantidad de flechas que entran en el punto debe ser igual a la cantidad de las que salen. En los extremos del circuito, tiene que haber un punto cuyas entradas sean una más que las salidas, y uno cuyas salidas sean una más que las entradas. Estas condiciones también son suficientes para un circuito; y si todos los puntos tienen tantas entradas como salidas, es posible un circuito circular.

Es fácil comprobar que la figura 4.3(c) viola las condiciones de Euler. De hecho, una vez que se ha cruzado el puente que está más a la izquierda para ir al norte, hay dos puentes hacia el sur. Sólo se puede usar uno de ellos, y nunca se puede volver a usar el otro. Esto arruinaba los paseos dominicales de los habitantes, y se entregó una petición al Ayuntamiento; luego se adoptó el sistema de la figura 4.3(d), satisfaciendo las condiciones de Euler.

Volvamos a los anillos Ouroboros.

Encontremos uno para los cuartetos. La idea de Good consiste en representar cada cuarteto como un camino de una sola dirección que conduce desde su trío inicial hasta su trío final. Por ejemplo, 0110 es el camino de la ciudad 011 a la ciudad 110, y circula en esa sola dirección. Hay otros tríos, así que hay ocho ciudades unidas por dieciséis caminos. El gráfico correspondiente se muestra en la figura

4.4.



4.4. Guía caminera de Good para los tríos.

Satisface las condiciones de Euler. En cada ciudad, dos caminos

entran y dos salen. Por lo tanto existe un circuito circular; pero eso es un anillo Ouroboros.

El mismo argumento funciona para quintetos, sextetos y demás. Eso explica por qué hay que satisfacer las condiciones de Euler. Por ejemplo, los caminos que salen de la ciudad 001 son 0010 o 0011: el nombre de la ciudad más 0 o 1. Son dos salidas. Por el mismo argumento, hay dos entradas: 0001 y 1001.

Los ingenieros electrónicos utilizan anillos Ouroboros más largos, y sus parientes matemáticos, para codificar mensajes. Los ceros y unos son dígitos binarios: 1 es una pulsación eléctrica, 0 la ausencia de pulsación. Dichos códigos tienen aplicaciones a la transmisión telefónica y a la cartografía por radar. La superficie de Venus se ha cartografiado desde la Tierra mediante el radar. Paradójicamente, la señal de retorno es tan débil que en promedio retoma menos de un cuanto do energía. ¡Pero el cuanto es la menor unidad posible de energía! La solución de esta paradoja es que el método de codificación es altamente redundante: la señal conserva sentido aunque falten la mayoría de los dígitos. Así que cuando un cuanto tiene la suerte de retomar a la Tierra, contribuye a una señal significativa.

Esto tiene siglos.

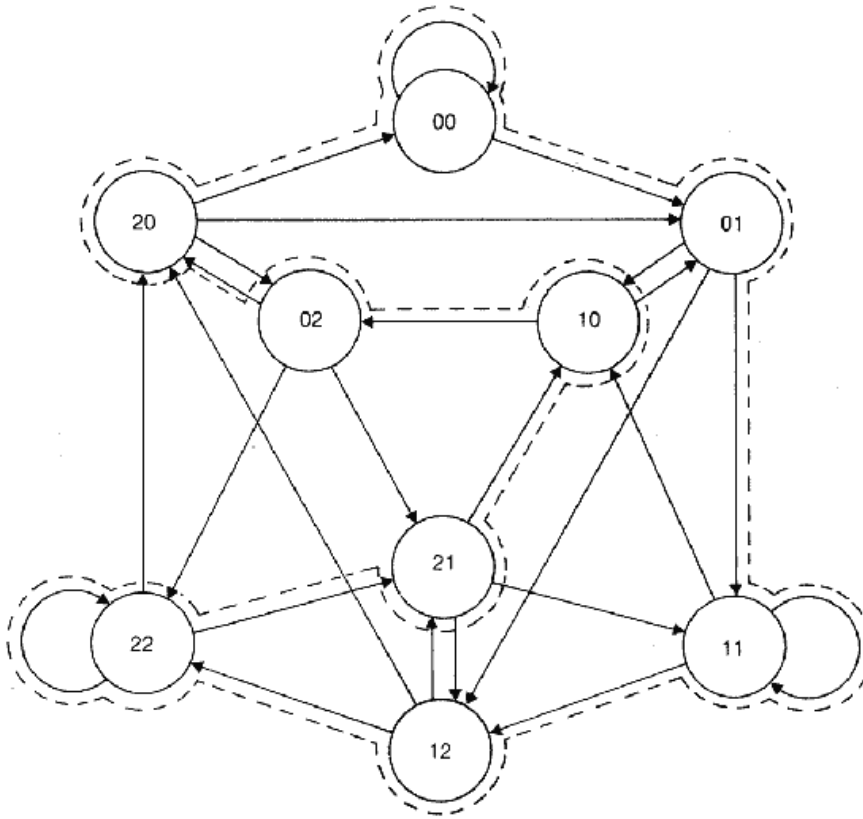
El libro de Stein incluye una tabulación de la historia de los anillos Ouroboros, desde el año 1000 hasta 1960. El libro trata sólo con secuencias de ceros y unos; pero podemos hacer las mismas preguntas para, por ejemplo, pares de dígitos 0, 1, 2. Hay nueve de ellos. La guía caminera Good a las nueve ciudades de la provincia de Pares-desde-Tres luce como la figura 4.5. Tres caminos entran en cada ciudad, y tres salen de ellas, así que el teorema de Euler nos indica que es posible un trayecto circular. El que se muestra aquí da el anillo Ouroboros

001122102.

Análogamente, para los tríos de tres dígitos hay un anillo Ouroboros

000111222121102202101201002.

En realidad obtuve estas secuencias aplicando un algoritmo —un método gradual cuyo éxito está garantizado— que funciona para cualquier enétuplo de m dígitos.



4.5. Guía caminera de Good para pares de tres dígitos.

Veamos el caso de los tríos formados a partir de los dígitos 0, 1, 2: el caso general es muy similar. Hagamos una lista de los veintisiete tríos posibles, en orden numérico, empezando en 000 y terminando en 222. Ahora anotemos el comienzo de un anillo Ouroboros:

000111222

y eliminemos de nuestra lista todos los tríos incluidos en él (así, por ejemplo, eliminamos 000, 001, 011, 111 y así hasta 222). Ahora miremos el trío más grande que comienza en 22: es 221. Anotemos el 1 en el final del anillo Ouroboros y tachemos 221 de la lista. Ahora busquemos el mayor trío que comience con 21. Repito, *siempre usando el trío más grande disponible* y tachándolo luego. Uno no se atasca, y la lista se cierra. El resultado es un anillo Ouroboros.

Como dije, el éxito del algoritmo está garantizado. M. H. Martin lo demostró en 1934.

Munido con este método, usted podrá escribir, antes del desayuno y con las manos atadas a la espalda, un anillo Ouroboros de longitud 117.649 que contenga todo sexteto posible de siete dígitos. O, si usted

no es tan ambicioso, cada par de cuatro dígitos o cada cuarteto de tres dígitos. *¡Vamos, inténtelo!*

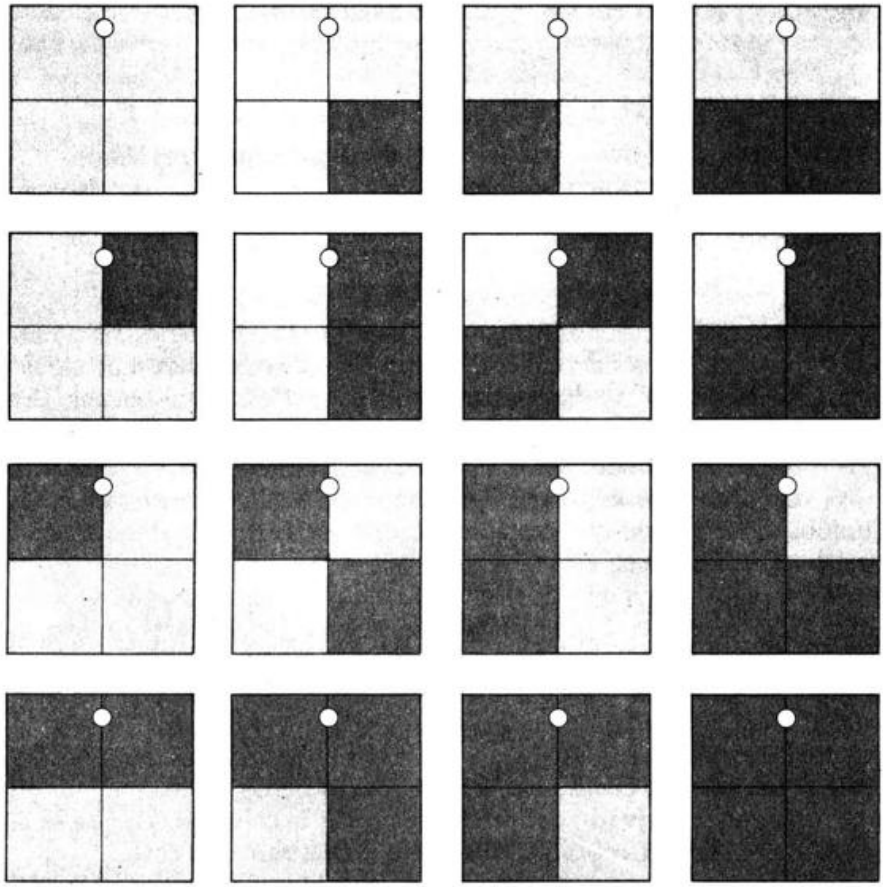
El algoritmo de Martin sólo produce un anillo Ouroboros por cada *m* y *n* dadas, pero en general hay muchas otras soluciones. Para los conjuntos con n miembros de dos dígitos, hay una fórmula para la cantidad de anillos Ouroboros, descubierta en 1946 por N. G. de Bruijn: es *dos elevado a la potencia* $2^{n-1}-n$, la cual crece con extrema rapidez. Los anillos obtenidos haciendo girar uno dado se consideran iguales. He aquí una tabla:

n	*Cantidad de anillos Ouroboros*
1	1
2	1
3	1
4	16
5	2048
6	7108864
7	744115188075855872

Las posibilidades matemáticas de autovoracidad no están agotadas. ¿Hay análogos de anillos Ouroboros en dimensiones más elevadas? Por ejemplo, hay dieciséis cuadrados 2×2 con ceros o unos. ¿Es posible inscribir ceros y unos en un cuadrado 4×4 de tal modo que los dieciséis subcuadrados consignen cada posibilidad exactamente una vez? Debemos fingir que los lados opuestos del cuadrado están unidos, de tal modo que cobra una forma toroide: yo lo denomino el *problema del Ourotoro*.

He aquí otro modo de decirlo. Corte las dieciséis piezas de la figura 4.6. Note que el punto blanco indica cuál es la parte de arriba. ¿Puede usted disponerlos en una cuadrícula de 4×4, manteniendo el punto blanco arriba, para que los cuadrados adyacentes tengan el mismo tono en los bordes comunes? De nuevo, esta regla también se aplica a cuadrados que se vuelven adyacentes si unimos las partes superior e inferior de la cuadrícula, o los lados izquierdo y derecho.

No quiero privarlo del placer de buscar la solución, así que se la daré al final de este capítulo. En cambio le mostraré otra cosa.



4.6 Piezas para d problema del Ourotoro.

Hay ochenta y un cuadrados 2×2 posibles que contienen los dígitos 0, 1, 2. Podemos juntarlos para formar un Ourotoro 9×9, de la siguiente manera. Comience con el correspondiente anillo Ouroboros:

001122102.

Escriba esto de nuevo:

001122102.

Luego córralo un espacio a la derecha, acordándose de desplazar el último dígito al comienzo:

2001122210.

Luego desplace estos dos espacios a la derecha; desplace el resultado tres espacios a la derecha; y así sucesivamente, cada desplazamiento con un espacio más que el anterior. El resultado, mostrado en la figura 4.7, es un Ourotoro.

No es difícil demostrar que este método funciona, sin verificar cada subcuadrado. *(Pista:* piense en las hileras de arriba y abajo del subcuadrado 2×2.) El mismo método de construcción vale para los cuadrados 2×2 de *m* dígitos siempre que m sea impar. Así, por ejemplo, usted puede generar un Ourotoro de cinco dígitos de cuadrados 2×2 desplazando repetidamente un anillo Ouroboros constituido por pares de cinco dígitos.

Pero el método falla cuando *m* es par. De hecho, no sé si existe un Ourotoro para cuadrados 2×2 de cuatro dígitos. ¿Alguien puede hallarlo? ¿Hay métodos generales para obtener Ourotoros para cuadrados 2×2 de *m* dígitos cuando m es par?

Cada hilera de un Ourotoro construido mediante este método es un anillo Ouroboros. ¿Existe un Ourotoro para cuadrados 2×2 de tres dígitos donde todas las columnas sean también anillos Ouroboros? Mi solución no tiene esta propiedad.

0	0	1	1	2	2	1	0	2
0	0	1	1	2	2	1	0	2
2	0	0	1	1	2	2	1	0
1	0	2	0	0	1	1	2	2
1	2	2	1	0	2	0	0	1
2	0	0	1	1	2	2	1	0
1	2	2	1	0	2	0	0	1
1	0	2	0	0	1	1	2	2
2	0	0	1	1	2	2	1	0

4.7 Un Ourotoro para pares de tres dígitos.

Tampoco tengo resultados para cuadrados 3×3, excepto algunas observaciones obvias. La cantidad de cuadrados 3×3 de dos dígitos es 2^9, que no es un cuadrado. Así que en este caso no puede existir un Ourotoro "cuadrangular". Sin embargo, podría existir uno rectangular, por ejemplo de 16×32. Observaciones similares se aplican a cuadrados $m \times m$ donde *m* es impar, a menos que el número de dígitos sea en sí mismo un cuadrado.

¿Y qué hay acerca de las tres dimensiones? Hay $2^8 = 256$ 2x2x2

cubos que contienen ceros y unos. ¿Se pueden obtener a partir de todos los subcubos de un cubo? No, porque 256 no es un cubo. Sin embargo, hay $2^{27} = 134.217.728$ cubos $3 \times 3 \times 3$ de dos dígitos, y ése es el cubo de 512...

La mente sufre un vértigo. *Yamátárájabhámsálagám...*

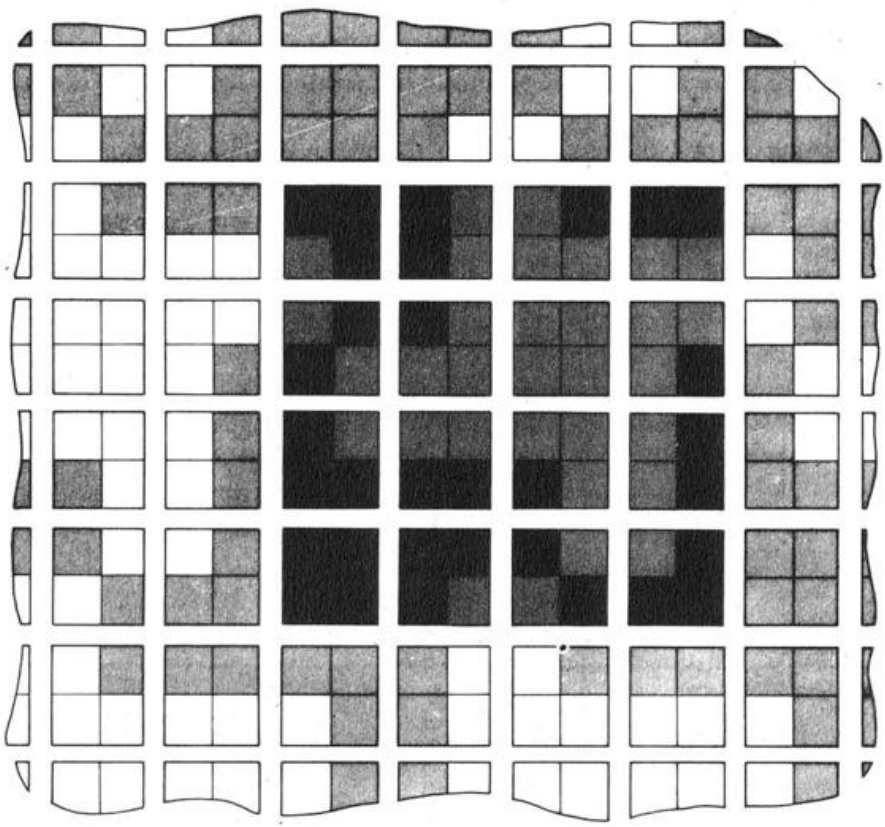
Soluciones

Pares de cuatro dígitos: usando el algoritmo de Martin, se obtiene

0011223321310302

Cuartetos de tres dígitos: el mismo método arroja

222212211212111022202210212021101220121011201100220021001200102021



4.8. Un Ourotoro 4×4 con sus correspondientes diseños.

Un Ourotoro 4×4 (esencialmente único) se muestra en la figura 4.8. Si su diseño se repite tal como se lo muestra, se cubre el plano con mosaicos oscuros y claros con forma de cruz, y allí aparecen todos los ordenamientos posibles 2×2 de cuadrados oscuros y claros.

Otras lecturas

N. G. de Bruijn: "A Combinatorial Problem", *Akademie van Wetenschappen,* (Amsterdam), 8 (1946), págs. 461-7.

I. J. Good: "Normal Recurring Decimals", *Journal of the London Mathematical Society*, 21 (1946), págs. 167-9.

M. H. Martin: "A Problem in Arrangements", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40 (1934), págs. 859-64.

G. H. Pettengill, D. B. Campbell y H. Masursky: "The Surface of Venus", *Scientific American* (agosto 1980), págs. 46-57.

Manfied Schroeder: *Number Theory in Science and Communication,* Nueva York, Springer, 1984.

Sherman K. Stein: "The Mathematician as an Explorer", *Scientific American* (mayo 1961), págs. 149-58.

Sherman K. Stein: *Mathematics: the Man-Made Universe,* San Francisco, Freeman, 1976.

5. ¿Falacia o aicalaf?

Era una oscura y fría noche de invierno en Tierra Lógica. Trinotonto y Trinobobo, los Gemelos Terribles, celebraban un debate lógico{1} En otras palabras, estaban discutiendo.

Como de costumbre.

—Sólo un elefante o una ballena dan nacimiento a una criatura que pesa más de 100 kilogramos —dijo Trinotonto—. ¿Correcto?

—Supongo que sí —dijo Trinobobo.

—El presidente pesa 101 kilogramos —dijo Trinotonto.

—Bien —dijo Trinobobo—, veo adonde quieres ir y no...

—Por ende... —dijo Trinotonto.

—¡La madre del presidente es un elefante o una ballena! —gritaron a coro.

—¡Eso es una falacia! —protestó Trinobobo.

—¿Qué es una falacia?

—Una falacia es un argumento aparentemente convincente que es lógicamente falso —dijo Trinobobo—. Me sorprende que no sepas...

—¡Claro que sé que es una falacia! Preguntaba cuál paso de mi deducción es falaz.

—El primero. No, el segundo. No, ambos son correctos, pero has olvidado que...

—¿Ves? ¡No es una falacia! ¡Es una aicalaf!

—¿Qué es una aicalaf?

—Mi deducción lógica sobre...

—¡No! Ya sé que te refieres a la deducción. Estoy preguntando qué demonios es una aicalaf.

—Una aicalaf —dijo Trinotonto— es un argumento aparentemente falso que en realidad es lógicamente correcto.

—Tu argumento no es una aicalaf. ¡Es una falacia!

—¡No!

—¡Sí!

—¡No!

—¡Sí!

—¡No!

—¡Sí! ¡Sí! ¡Sí! ¡Sí!

Y así siguieron por un rato. No hay nada como un buen argumento lógico... que es precisamente lo que faltaba en esa discusión.

En Tierra Lógica todos son lógicos o matemáticos. Es un lugar extraño. Para hacer matemática hay que ser bueno en lógica. De hecho, la investigación matemática es el arte de distinguir las falacias de las aicalafs. ¿Sería usted apto para la investigación matemática? He aquí diez problemas para poner a prueba esa aptitud. Todo lo que usted debe hacer es decidir cuál es cuál. Las soluciones se encuentran al final. ¡Buena suerte!

1. Gemelos tangram

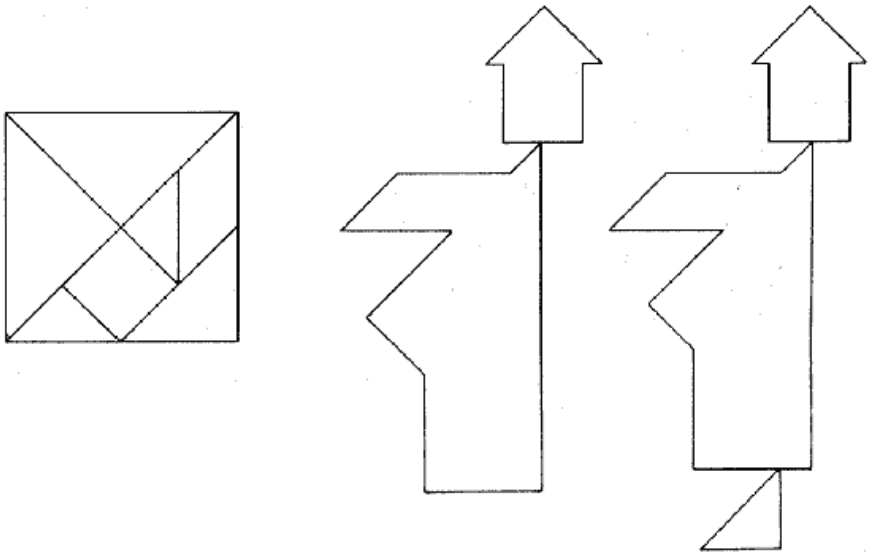
El antiguo puzzle chino de los tangrams consiste en un cuadrado cortado en siete partes. Trinotonto y Trinobobo jugaban a los tangrams.

—Construí un hombre —dijo Trinotonto.

—Yo también —dijo Trinobobo (figura 5.1).

—¡Idiota, el tuyo no tiene pie! —dijo Trinotonto—. Sin duda omitiste una de las piezas.

¿Falacia o aicalaf?



5.1 Tangrams. ¿Trinobobo ha olvidado una pieza?

2. Logaritmanía

—¿Te apetece la matemática, eh, Trinotonto? —preguntó Trinobobo.

—Siempre que venga acompañada por un buen vino y la sirvan caliente...

—¡Entonces esto te encantará! Bien, recordarás que la serie logarítmica $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ es válida siempre que x sea mayor que –1 y menor o igual que 1. —Convergente, quieres decir.

—¡Exacto! ¡Hoy estás cordial, Trinotonto!

—¡No lo estoy!

—¡Sí lo estás!

—¡No lo estoy!

—Como quieras. Ahora, pongamos $x = 1$ para obtener $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$ duplícalo:

$$2\log 2 = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{9} - \cdots$$

$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \cdots$$

Junta pares de términos con el mismo denominador. Ahora obtienes

$$2\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots = \log 2$$

Por lo tanto 2 log 2 = log 2, es decir, 2 = 1. ¿Magnífico, verdad? *¿Falacia o aicalaf?*

3. Suma fácil

—Conozco una parecida —dijo Trinotonto—. Toma la serie 1 – 1 + 1 – 1 + 1– 1 + ...

Puesta entre paréntesis de este modo,

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

suma 0. Pero puesta entre paréntesis de este modo

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$$

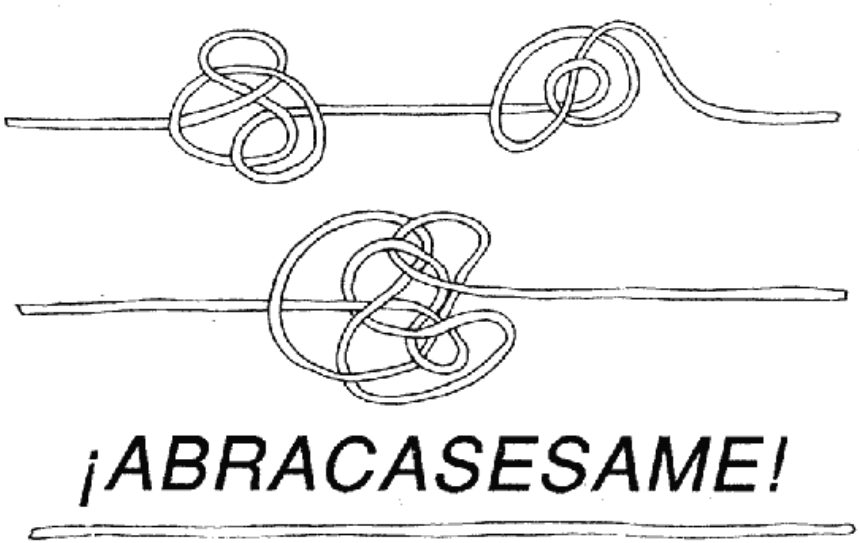
la suma es 1. Así que 1 = 0. De paso, eso confirma tu resultado. Tan sólo suma 1 a cada lado.

¿Falacia o aicalaf?

4. Nudo infinito

Trinobobo se considera un buen mago.

—¡Oye, Trinotonto! ¡He aquí un buen truco! Primero, hago un nudo en este cordel, así... Luego hago otro... ¡Abracasésamo! ¡Mira, ambos desaparecieron! (Figura 5.2)



5.2. Dos nudos... Si se los une, se cancelan. ¿Es posible?

—No seas tonto, Trinobobo. Sólo hiciste un nudo y su antinudo, así que ambos se anulan mutuamente.

—¿Antinudo? ¿Quién oyó hablar de un antinudo?

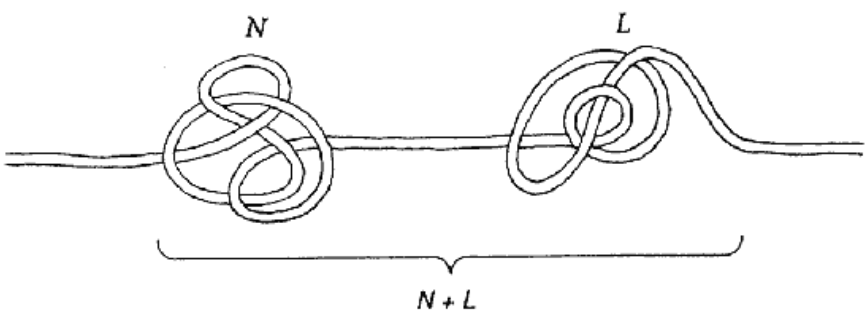
—El mismo nudo, atado a la inversa.

—¡Pamplinas! ¡No existen los antinudos! ¡Y puedo demostrarlo! ¿Sabías que puedes hacer aritmética con nudos? Para sumar dos nudos *N* y *L* simplemente los haces por tumos en el mismo cordel (figura 5.3). Llama al resultado *N* + *L*, ¿correcto?

—Si insistes.

—Bien, ahora, obviamente O debe ser el antinudo. Un nudo que no está anudado, si entiendes a qué me refiero.

—¿Por qué?



5.3. Nudo no aritmético.

—Bien, hacer un nudo *N* y desanudarlo es como hacer un nudo *N,* así que *N* + O = *N*. Tiene sentido. Ahora bien, si *N* es un nudo, entonces su antinudo se puede expresar como –*N*, porque *N* + (–*N*)

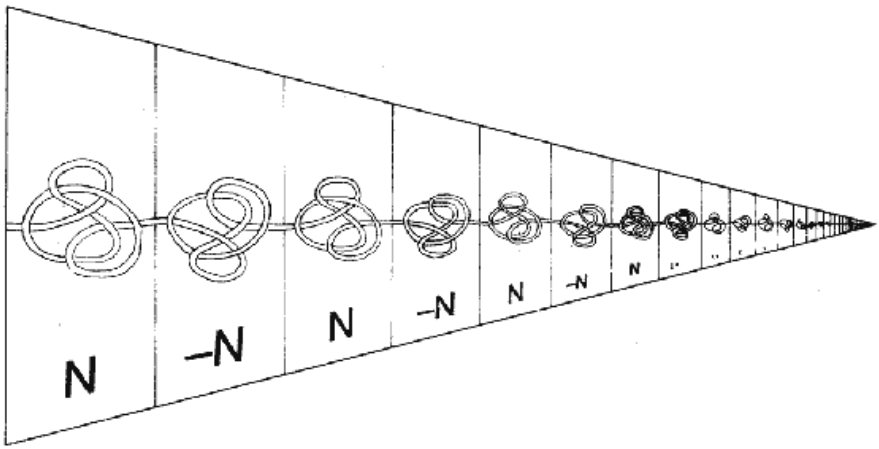
tiene que ser igual a 0.

—¡Aja! ¿Conque aceptas que puede existir un antinudo?

—No, no. Sólo quiero demostrar que el único nudo que tiene un antinudo es el desanudo.

—Oh. ¿Qué? Repite eso...

—Lávate las orejas y oirás mejor. Supongamos que hago el nudo infinito (figura 5.4)



5.4. Un nudo infinito demostrando que la cancelación es imposible. ¿O no lo es?

$$N - N + N - N + N - N + \ldots$$

—¿Sabes? He visto esto antes...

—Puesto entre paréntesis así

$$(N - N) + (N - N) + (N - N) + \ldots$$

su valor es cero. Pero, puesto así:

$$N + (-N + N) + (-N + N) + (-N + N) + \ldots$$

su valor es...

—*N*. Conque $N = 0$. Sí, seguro. ¿Y me acusabas a mí de decir pamplinas?

¿Falacia o aicalaf?

5. Póquer telefónico

A Trinotonto y Trinobobo les gusta jugar a las cartas. Pero Trinobobo pronto se irá de vacaciones.

—Echaré de menos nuestras partidas de naipes.

—Yo también. Tuvimos riñas tan feroces...

—¡Ya sé! ¡Jugaremos al póquer por teléfono! Yo barajaré, te daré cinco naipes y luego nos diremos con qué cartas estamos jugando.

Trinotonto reflexionó.

—Gran idea —dijo con sarcasmo—. ¿Cómo sé que no harás trampa?

—Prometo no hacerlo.

—¡Mentiroso! ¡Siempre mientes!

—Sí, es verdad. De todos modos, ¿cómo sé que tú no harás trampa?

—Podemos decimos cuáles son todas las cartas —dijo Trinotonto. Reflexionaron un instante.

—¡Eso es estúpido!

—No lo es. Podemos ponerlas en código, de modo que el otro no pueda decodificarlas. Luego, al final, podemos revelar nuestros códigos y verificar si alguien hizo trampa.

—Lo lamento, Trinotonto, pero no te entiendo.

—Bien, escucha con atención, lo diré una sola vez... ¿Has oído hablar de códigos cerrados?

—¿Códigos teóricamente indescifrables? ¿Dónde puedes indicar a cualquiera cómo poner un mensaje en código sin que eso le ayude a decodificar nada?

—Correcto. Ahora, escoge una regla de codificación C_{bobo} y una regla de decodificación D_{bobo}; yo escojo las reglas C_{tonto} y D_{tonto}.

Ambos conocemos las reglas *C*, pero sólo nosotros conocemos nuestras reglas *D*.

—De acuerdo.

—Si yo pongo un mensaje M en código obtengo $C_{tonto}M$. Para decodificarlo, elaboro $D_{tonto}C_{tonto}M$, que es *M*. Así D_{tonto} deshace C_{tonto}. Ahora bien, yo tomo los cincuenta y dos mensajes...

—¡Yo tomo los cincuenta y dos mensajes!

—Muy bien. Tú tomas los cincuenta y dos mensajes

AS DE TRÉBOLES
DOS DE TRÉBOLES

y así hasta llegar al

REY DE PICAS.

Tú codificas cada uno usando tu regla. Cada mensaje M se transforma en Barajas el mazo...

—¿Quieres decir que recombinas los naipes aleatoriamente?

—Correcto. Luego me lo transmites a mí.

—Me parece bastante justo.

—Luego yo selecciono cinco mensajes al azar, y te los envío de vuelta para que tú puedas decodificarlos para saber cuál es tu mano.

Yo no puedo conocerla, porque no puedo descifrar tu regla de codificación. Luego selecciono otros cinco mensajes al azar, constituyendo mi mano.

—Ah, pero allí tienes un problema. ¡No puedes decodificarlos para saber qué son!

—No, pero soy astuto. Los codifico una segunda vez, usando mi regla C_{tonto}. Así, si el mensaje es M, se transforma en $C_{tonto}C_{bobo}M$. Luego te los retransmito, y tú deshaces el efecto de tu código C_{bobo} aplicando D_{bobo}. Eso da $D_{bobo}C_{tonto}C_{bobo}M$ que equivale a $C_{tonto}M$.

—Das por sentado que $C_{tonto}C_{bobo} = C_{bobo}C_{tonto}$.

—En efecto. Pero eso se puede arreglar si escogemos los códigos correctos. Supongamos que así es. Me envías de vuelta los cinco mensajes $C_{tonto}M$. Yo los decodifico aplicando D_{tonto}. Ahora cada cual tiene un juego de naipes, sin naipes comunes en ambas manos, y nadie sabe qué naipes tiene el otro, así que podemos jugar. Mantenemos una grabación de todos los mensajes, y al final revelamos nuestras reglas de decodificación, de modo que ambos podemos verificar que nadie hizo trampa en ningún momento.

Trinobobo reflexionó.

—Demonios, es complicado —dijo.

—Mira, he aquí una analogía. Póquer por correo. Guardas las cincuenta y dos cartas en cajas idénticas, y las guardas bajo candados para los cuales sólo tú tienes la llave. Me las envías. Yo selecciono al azar para formar tu mano. Selecciono otras cinco al azar para formar mi mano, y les pongo candados para los cuales sólo yo tengo la llave. Te envío las diez; tú sacas los candados y me envías mis cinco, con mis candados en su lugar. ¡Simple!

Trinobobo sacó una libreta y se puso a anotar en ella, verificando la lógica del asunto. De pronto se detuvo.

—Espera —dijo—. Supongamos que hay sólo tres naipes.

—Pero hay cincuenta y dos.

—Sí, pero el método debería funcionar con sólo tres. Ahora, nos enviamos uno al otro mensajes, al final de los cuales cada cual sabe una carta, la propia, y sabe que son diferentes. ¿Correcto?

—Correcto.

—Bien, ahora digamos que E_{bobo} es el conjunto de naipes con el cual yo habría terminado, coherente con esos mensajes, y que E_{tonto} sea el conjunto de naipes con el cual tú habrías terminado. Entonces mi naipe pertenece a E_{bobo} y el tuyo pertenece a E_{tonto}.

—Entiendo adónde vas —dijo Trinotonto—. Cualquiera de nosotros puede deducir E_{bobo} y E_{tonto} por pura lógica. De eso se trata. Así que el conjunto E_{bobo} no puede ser sólo tu naipe.

—No, de lo contrario sabrías cuál es mi naipe. Por otra parte, E_{bobo} y E_{tonto} no pueden contener un naipe común, de lo contrario ambos recibiríamos el mismo. Así que E_{bobo} no puede ser las tres cartas, porque entonces tú no recibirías ninguna.

—Entiendo. Así que E_{bobo} contiene exactamente dos naipes de los tres.

—¡Excelente! Pero, por ello mismo, lo propio ocurre con E_{tonto}.

—Y los conjuntos no se superponen, así que tiene que haber por lo menos cuatro naipes en total —dijo Trinotonto—. Pero sólo hay tres.

—Así que a fin de cuentas no podremos jugar al póquer por teléfono —dijo Trinobobo.

¿Falacia o aicalaf?

6. ¿Galileo tenía razón?

Durante una discusión bastante violenta acerca del menor número entero que no se puede describir usando menos de catorce palabras, Trinotonto cogió una taza y se la arrojó a Trinobobo.

—¡Ja! ¡Erraste! ¿Ni siquiera sabes computar un arco parabólico?

—¿Qué tienen que ver las parábolas?

—Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil en descenso es una parábola.

—No lo es.

—Al margen de la resistencia del aire, desde luego.

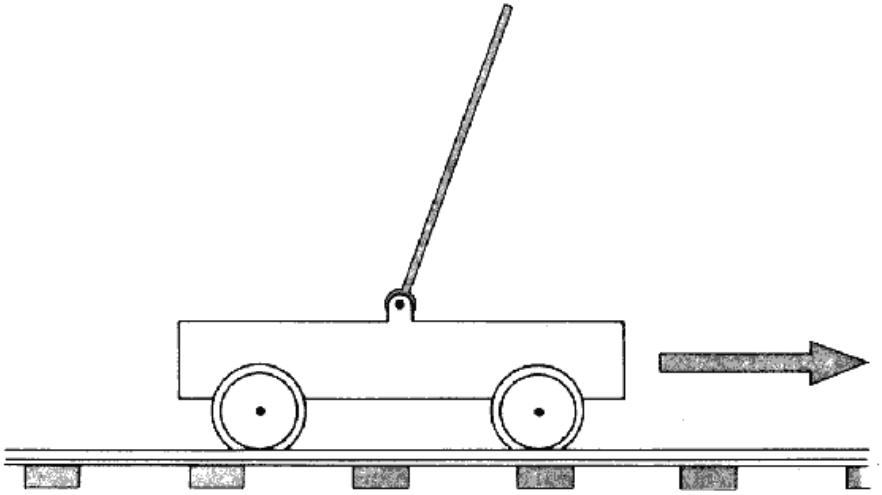
—Aun sí. Galileo estaba equivocado.

¿Falacia o aicalaf?

7. Au Courant Trinobobo estaba leyendo un clásico de matemática expositiva, *What is Mathematics?* de Richard Courant y Herbert Robbins.

—¡Oye, esto está bueno! ¡Despierta, Trinotonto!

—¿Qué?



5.5. Palanca enganchada a un vagón de ferrocarril. ¿Es posible evitar que toque el suelo?

—Supongamos que un tren viaja entre dos estaciones ferroviarias por una vía recta. Una palanca está enganchada al piso de uno de los vagones, capaz de moverse sin fricción hacia adelante o hacia atrás hasta que toca el suelo (figura 5.5). Si toca el suelo, supongamos que permanece allí durante el movimiento subsiguiente. Supongamos que especifico *de antemano* cómo se mueve el tren. Pero no es preciso que el movimiento sea uniforme: el tren puede acelerar, parar de golpe, incluso retroceder. Debe empezar en una estación y terminar en la otra. ¿Siempre puedes poner la palanca en tal posición que nunca toque el suelo durante el viaje?

—Vaya... es complicado. Las ecuaciones de movimiento son... ¡Oh, espera, lo tengo! ¡Es un problema topológico!

—¿Eh? ¿Qué tienen que ver las láminas de goma con...?

—No, no. Es sobre la continuidad. ¡La posición final de la palanca depende continuamente de la posición inicial! Ahora bien, hay una gama continua de ángulos donde puedo ponerla al principio, de 0º a 180°, así que la gama de ángulos finales también es continua. Si empiezo bajándola hacia adelante en 0º, permanece allí. Si empiezo bajándola hacia atrás en 180°, permanece allí. Así que la gama de ángulos finales incluye todos los valores entre 0º y 180°. En particular, incluye los 90°, así que puedo arreglar para que la palanca termine vertical. Como permanece en el piso cuando lo golpea, no puede golpear el piso.

¿Falacia o aicalaf?

8. Ecuación integral

—Tengo otro problema matemático —dijo Trinobobo.

—Jactancioso.

—Es una cuestión de cálculo. ¿Sabes que cuando integras la función exponencial e^x vuelves a obtener e^x ?

—¿Quieres decir que $\int e^x = e^x$?

—¡Correcto! Ahora escribe eso como

$$(1 - \int)\, e^x = 0$$

de modo que

$$e^x = \frac{1}{1-\int} 0$$

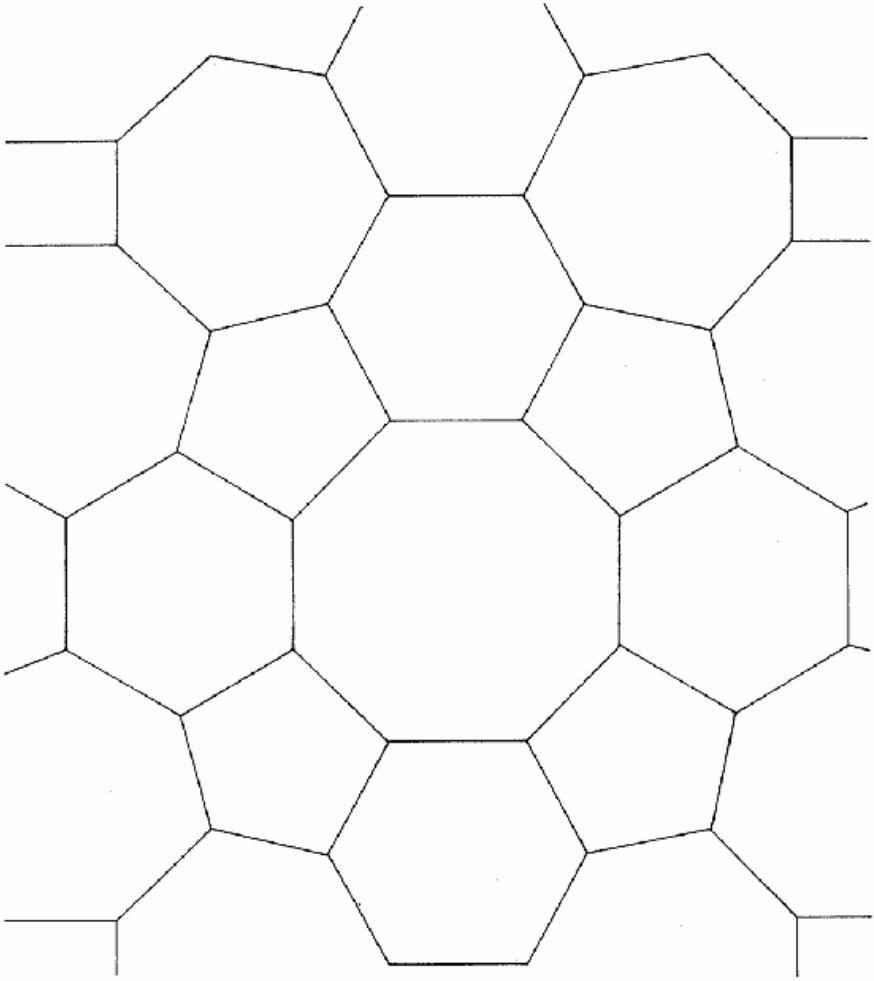
$$= (1 + \int + \int 2 + \int 3 + \ldots)\, 0$$

usando la serie de potencias para $1/1 - \int$. En otras palabras, $e^x = (1 + \int + \int\int + \int\int\int + \ldots)\, 0$.

Pero $\int 0 = 1$, $\int 1 = x$, $\int x = \frac{1}{2}x^2$, y así sucesivamente. Terminas con la serie de potencias $e^x = 0 + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + - \cdots$

¿No es sensacional?

¿Falacia o aicalaf?



5.6. ¿Nuevos mosaicos con polígonos regulares?

9. ¿Mosaicos imposibles?

Trinotonto estaba jugando con mosaicos. Todos parecían ser polígonos regulares, con lados iguales y ángulos iguales.

—¡Oye, eso es magnífico! ¡Todos encajan para cubrir el plano! (Figura 5.6) —Déjame echar una ojeada —dijo Trinobobo—. Algo está mal, Trinotonto. Si cubres todo el plano con una mezcla de polígonos regulares de lados iguales, puedes hacerlo usando polígonos de tres, cuatro, seis, ocho y doce lados, pero no otros. Pero estos mosaicos incluyen polígonos de cinco y siete lados. Debes de haber cometido un error.

—Bien, mira tú mismo.

¿Falacia o aicalaf?

10. Errores ortográficos

—Mi tumo —dijo Trinobobo—. Una rápida para terminar: “Ay cinco herrores en ezta horación”.

¿Falacia o aicalaf?

Soluciones

1. Mellizos tangram

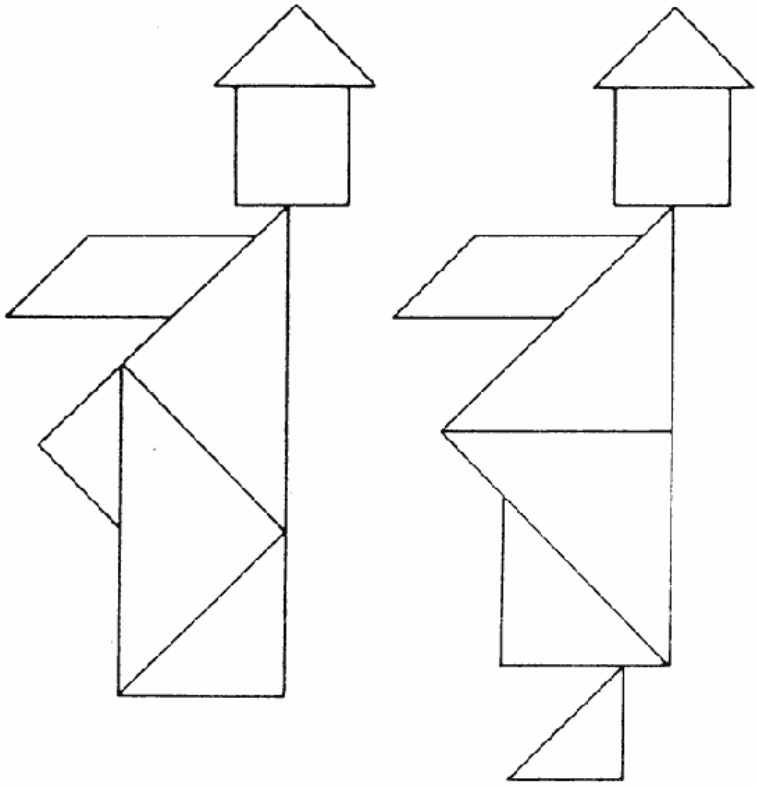
Falacia. Trinobobo no omitió una pieza. Sólo halló otro ordenamiento (figura 5.7).

2. Logaritmanía

Falacia. La serie logarítmica no es absolutamente convergente (convergente si cada término es vuelto positivo) y por ende no se puede reordenar.

3. Suma fácil

Falacia. La suma de la serie no está bien definida.



5.7 El hombre tangram de Trinobobo, y el de Trinotonto. ¡No faltan piezas!

4. Nudo infinito

Aicalaf. Superficialmente luce como el problema anterior, pero no es así. El nudo infinito está bien definido, y todas las manipulaciones de la suma tienen correspondencias geométricas válidas. La demostración se puede efectuar con todo rigor.

5. Póquer telefónico

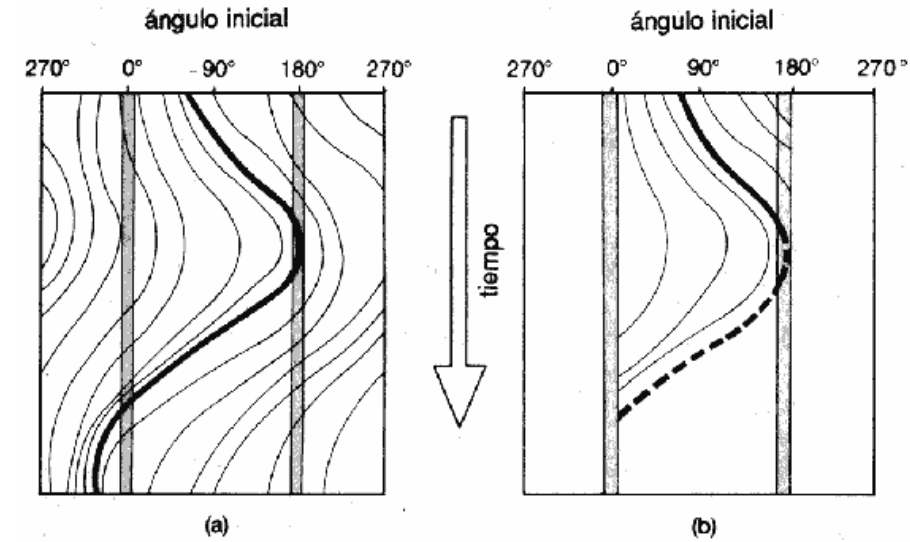
¡Falacia y aicalaf! Ambos argumentos son “correctos”. El segundo (prueba de la imposibilidad) no se contradice con el primero (solución práctica). El punto es que dado un tiempo suficientemente largo los mensajes en código involucrados se pueden decodificar, y la partida de póquer se vuelve imposible. Pero en la práctica el tiempo sería más largo que la edad del universo. Eso es un “código indescifrable” para propósitos prácticos. Para saber más sobre estos códigos, vea los Ítems de Gardner, Hellman y Klamer en “Otras lecturas”.

6. ¿Galileo tenía razón?

Aicalaf. El resultado de Galileo da por sentada una Tierra plana y una gravedad constante. Con una Tierra esférica, y gravedad newtoniana, la trayectoria de un cuerpo en descenso es similar a la de cualquier otro cuerpo que gire alrededor de la Tierra: una elipse.

7. Au Courant

Falacia. (¡Recibiré muchas cartas de protesta!) Si la presunción de continuidad es correcta, el argumento es una aicalaf. Pero la presunción de continuidad no está justificada. El problema radica en esas "condiciones de límite absorbentes": si la palanca golpea el piso, se queda allí.



5.8 Por qué Courant y Robbins no debieron dar por sentada la continuidad. Los gráficos muestran la historia de diversas posiciones iniciales. Las dos imágenes son idénticas, excepto que en (b) se han añadido las "condiciones de límite absorbentes" (líneas grises). La historia mostrada como línea negra no causa problema en (a). Sin embargo, como es tangente a la línea gris en 180°, representando el piso, en (b) causa una discontinuidad. Toda posición inicial a la izquierda de la línea negra termina en el piso a 0°; toda posición inicial a la derecha de la línea negra, o sobre ella, termina en 180°.

Imaginemos primero que la palanca puede girar 360°, sin que haya piso. Entonces un desarrollo posible se muestra en la figura 5.8(a). Cuando las condiciones de límite absorbentes se reinsertan (figura 5.8[b]), todas las posiciones iniciales terminan en el piso.

Este error en el razonamiento de Courant y Robbins fue señalado inicialmente por Tim Poston en la revista *Manifold* en 1976. Aún no es tan conocido como debería ser.

8. Ecuación integral

Aicalaf. La teoría de los espacios de Banach se puede usar para dar una justificación rigurosa de las manipulaciones del signo J. Si se lo trata como un operador, la expansión de la serie para $\frac{1}{1-J}$; es correcta.

9. ¿Mosaicos imposibles?

Falacia. O bien los mosaicos no son exactamente polígonos regulares, o bien no concuerdan con exactitud. Por ejemplo, un vértice está rodeado por un pentágono, un hexágono y un octágono. Si éstos son regulares, sus ángulos son 108°, 120° y 135°, lo cual suma 363°. Pero si los mosaicos concuerdan con exactitud, la suma debería ser 360°.

La ilustración imita un antiguo diseño islámico.

10. Errores ortográficos.

Aicalaf. Hay sólo cuatro errores ortográficos. Pero hay un quinto error: la afirmación de que hay cinco errores.

Otras lecturas

W. W. Rouse Ball: *Mathematical Recreations and Essays,* Londres, Macmillan, 11ª ed., 1959.

Richard Courant y Herbert Robbins: *What is Mathematics,* Oxford, Oxford University Press, 1941.

K. Critchlow: *Islamic Patterns,* Nueva York, Schocken Books, 1976.

Martin Gardner: "Mathematical Games: a New Kind of Cypher that would take Millions of Years to Break", *Scientific American* (agosto 1977), págs. 120-4.

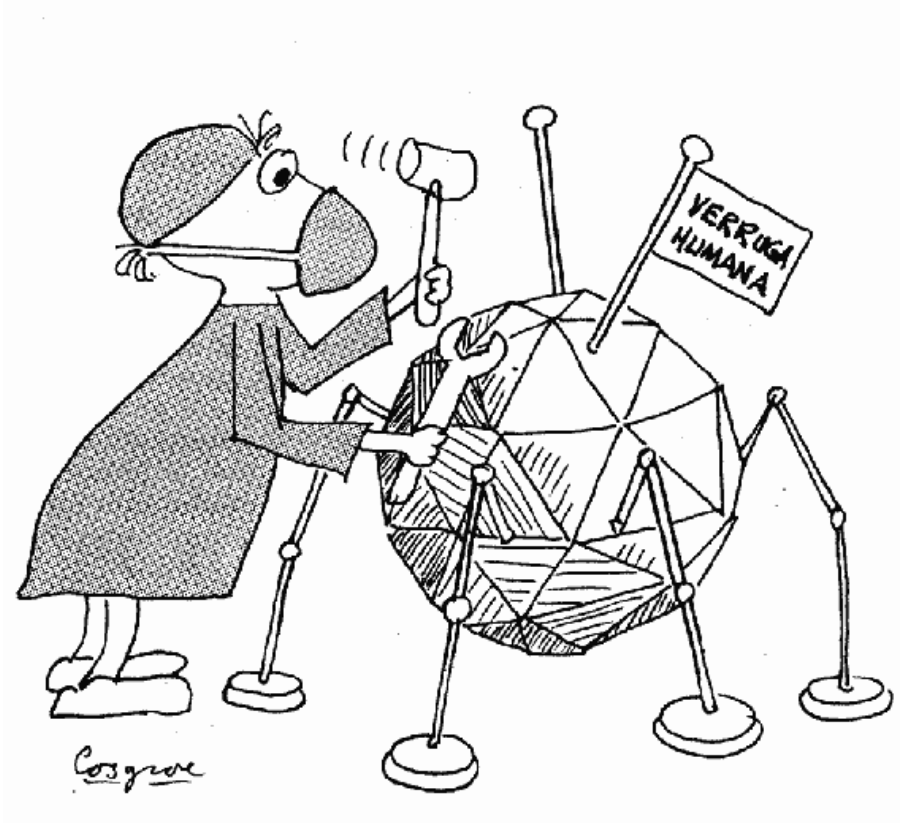
Branko Grünbaum y G. C. Shephard: *Tilings and Patterns,* San Francisco, Freeman, 1987.

Martin E. Hellman: "The Mathematics of Public-key Cryptography", *Scientific American* (agosto 1979), págs. 130-9.

David A. Klarner (comp.): *The Mathematical Gardner,* Boston, Prindle-Weber-Schmidt, 1981.

Tim Poston: "Au Courant with Differential Equations", *Manifold,* 18 (primavera 1976), págs. 6-9.

6. Construya su propio virus



Yo aguardaba abatido en la sala de espera del médico. Al lado había una mujer corpulenta con un niño pequeño arropado en un chal tejido. La diminuta cara rosada estaba cubierta de manchas aún más rosadas. Me moví dos asientos a la izquierda y traté de recordar si ya había tenido varicela.

—¡El siguiente!

Miré a la recepcionista y pasé a la habitación interior.

Confieso que rara vez disfruto de una visita al doctor Athanasius Cruel; pero a pesar de su adusta apariencia es uno de los mejores médicos del mundo. Lamentablemente odia la matemática —una falla no infrecuente en la comunidad médica— y sabe que yo soy matemático. Nuestra relación es un poco tensa.

—Usted de nuevo —dijo.

—No lo habría molestado, pero tengo un poco de gripe y...

—Matemático —escupió, como si dijera fiebre tifoidea—. No me engaña, lo recuerdo bien. Parásitos.

—No, es grip...

—No quise decir que usted tenga parásitos. Digo que los matemáticos son parásitos. No quiero ofender, desde luego. No es nada personal. Simplemente no soporto a esas criaturas. Me refiero a los matemáticos. ¿Qué ha hecho la matemática por la medicina?

¿Qué ha hecho la medicina por la matemática?, pensé. Estaba por enumerar una variedad de aplicaciones médicas de mi materia, desde el análisis estadístico de las epidemias hasta las irregularidades del ritmo cardíaco humano y el mal funcionamiento de la glándula tiroides, pero me interrumpió.

—Nada —dijo, en respuesta a su pregunta retórica.

Un demonio de mi interior —un giro más asociado con la Edad Media que con el practicante moderno, pero que sigue siendo curiosamente eficaz— me urgió a defender mi profesión.

—Se sorprendería usted —dije.

Me puso un palillo de madera en la boca y me inspeccionó la lengua.

—Hmm. ¿Qué?

—La mazemázica ez una mazeria ezzraña —balbuceé. Me miró dando a entender que esta información no era novedosa, y me sacó el palillo. Continué, con mejor dicción—: Aun la más pura de la matemática pura tiene muchas aplicaciones inesperadas.

—Ya conozco esa excusa.

—Pero es cierta. Usted sabe acerca de los antiguos griegos, por cierto...

—Hipócrates era griego —señaló—. Desde luego, soy versado en ese período histórico.

—Sí, bien... Euclides, verá usted...

—Geometría —espetó como si dijera gota terminal.

—¡Correcto! —exclamé con entusiasmo—. El clímax de la obra en diez volúmenes de los *Elementos* de Euclides es la demostración de que hay cinco sólidos regulares. El tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y...

—El icosaedro —concluyó el doctor—. Usted tiene exoftalmia... ojos desencajados —observó. Esta suele ser una enfermedad de los pececillos, pero tenía razón. Yo tenía los ojos desencajados porque él sabía lo del icosaedro—. Un sólido regular cuyas caras son veinte triángulos equiláteros. No luzca tan sorprendido. Sé algo de

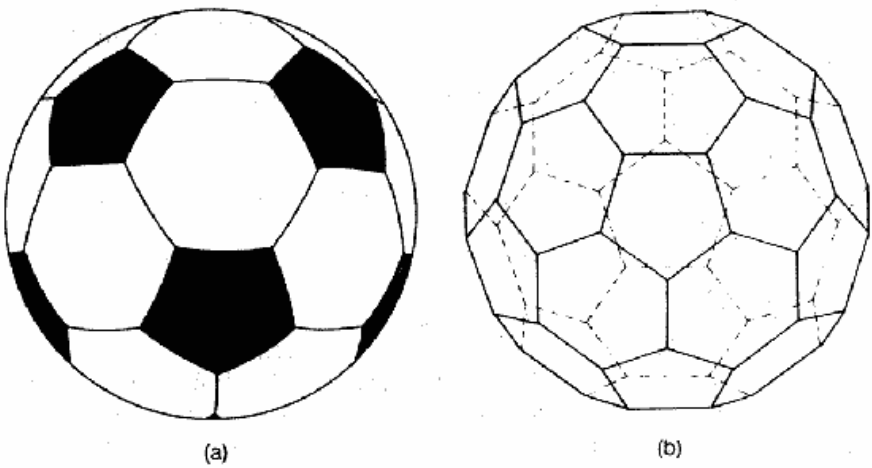
matemática. —Resopló—. Simplemente no sé para qué sirve, es todo.

—El icosaedro es curioso —dije—. Fue descubierto alrededor del 370 a.C. como concepto puramente matemático. En la época, nadie lo podía hallar en la naturaleza.

—Cristales —dijo él.

—Curiosamente no fue así —repliqué—. Cubos, octaedros y tetraedros, sí. Pero no hay geometría quíntuple en un cristal. —Me pregunté si debía comentarle el reciente descubrimiento de los cuasicristales, que tienen una especie de simetría quíntuple de corto alcance, pero decidí que sólo contribuiría a confundir las cosas.

—Pelotas de fútbol —dijo.



6.1 La moderna pelota de fútbol (a) tiene la forma de un icosaedro trunco (b).

Acepté que la moderna pelota de fútbol (figura 6.1) tiene esencialmente forma de icosaedro. En realidad es un icosaedro *trunco,* al cual le han eliminado las esquinas. Pasé a explicar que lo habían seleccionado porque era una excelente aproximación a una esfera que se podía confeccionar con retazos planos de cuero, y que había reemplazado el viejo diseño basado en un cubo, cuyos lados cuadrados estaban cortados en tres franjas rectangulares paralelas. Mientras él me metía un gélido estetoscopio dentro de la camisa, le aclaré que la pelota de fútbol no existía en el 370 a.C.

—Vejigas de cerdo —dijo. Era un juramento pintoresco. Yo jamás lo había oído.

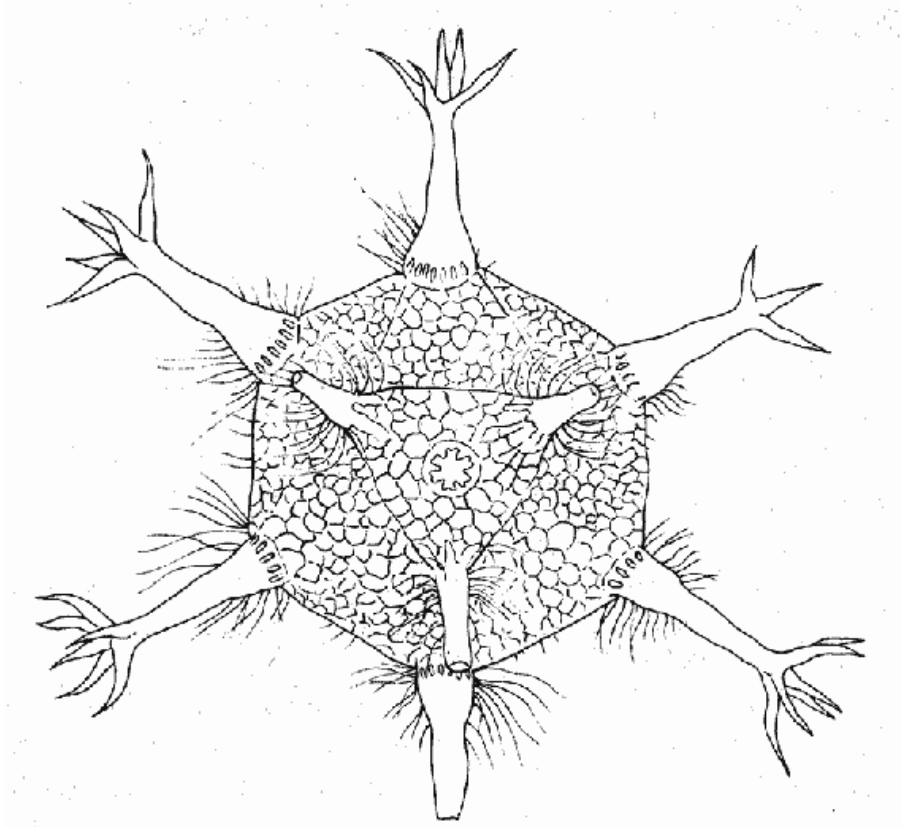
—No, no creo...

—¡Ah! —exclamó—. Curso de biología, años atrás en Addenbrooke's... ¡Radiolarios! Un sujeto llamado Heckle o algo parecido.

Ernst Haeckel había realizado un largo viaje marítimo buscando especímenes científicos, y había publicado los resultados en su

Challenger Monograph de 1887. Yo lo sabía porque está mencionado en uno de mis libros favoritos sobre personajes estrafalarios.

—Sí, D'Arcy Thompson reprodujo algunos dibujos de Haeckel en *On Growth and Form.*



6.2. La circogonia icosahedra*, un radiolario del* Challenger Monograph *de Emst Haeckel.*

Un radiolario es una criatura unicelular microscópica con un esqueleto exterior altamente simétrico. Haeckel hizo dibujar cientos de ellos, y algunos tenían aproximadamente la forma del icosaedro (figura 6.2). Pero, para ser franco, hay razones para suponer que Haeckel exageró un poco la simetría de sus radiolarios. Se lo señalé al doctor.

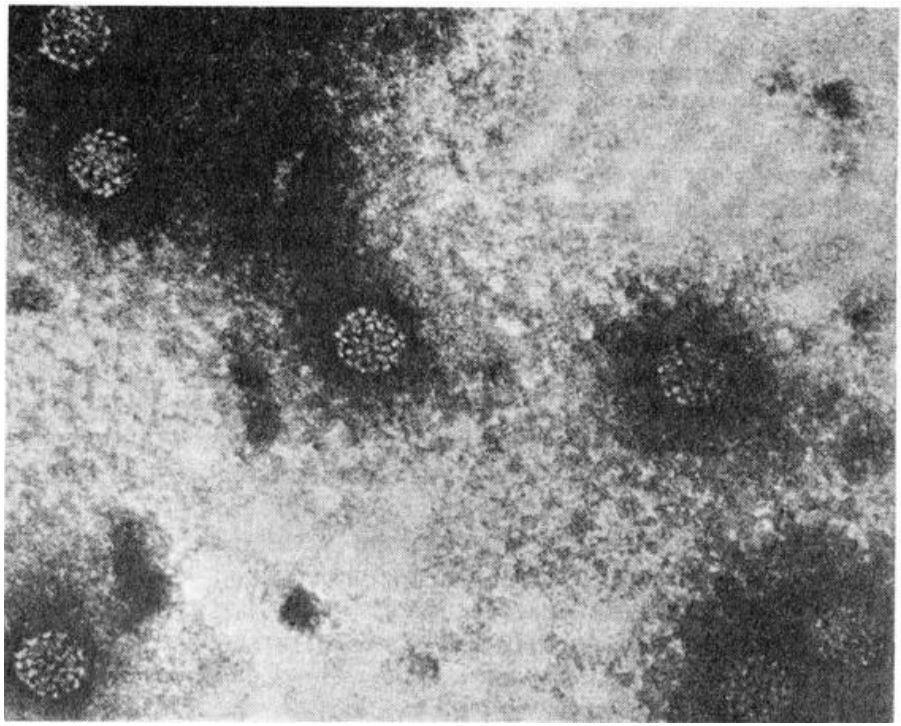
—Le daré una pista —dije—. Algunos científicos han llamado al icosaedro "la forma favorita de la naturaleza".

—Hmm. —El doctor se rascó la barba—. Me rindo.

—Qué vergüenza. Y tratándose de un médico.

—¿Qué quiere usted decir?

—Viruela —dije.



6.3. El virus de la verruga humana está constituido por setenta y dos unidades idénticas dispuestas con simetría de icosaedro. [Madley, Virus Morphology]

—¿Eh?

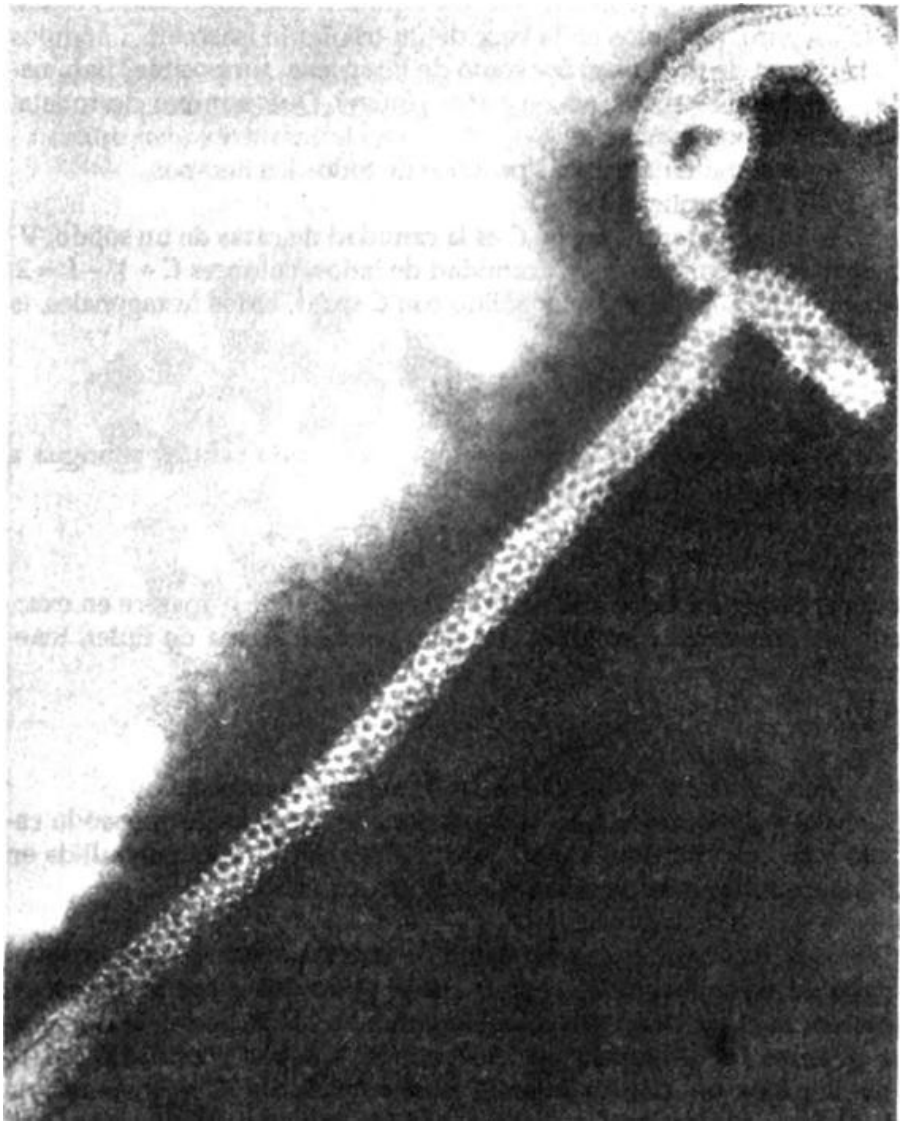
—Polio. Herpes. Mosaico amarillo del nabo...

Me palpó el estómago, con tanta firmeza que me hizo torcer la cara.

—El icosaedro —insistí sin amedrentarme— es una de las formas más comunes en un virus.

Eso lo despertó.

—¿De veras? Veamos... —Exhumó un enorme texto y lo hojeó—. Santo Dios, ¡el matemático ha acertado, para variar! (figura 6.3) Vaya. ¿Por qué alguien escogería un icosaedro?



6.4. El virus de Influenza C es una helicoide construida a partir de unidades idénticas dispuestas como escalones de una escalera de caracol. [Madeley, Virus Morphology].

—Quizá por la misma razón que se aplica a las pelotas de fútbol —dije—. Si usted quiere formar un cuerpo más o menos esférico a partir de una cantidad menor de unidades idénticas, el icosaedro es la mejor forma. Si desea una explicación más profunda, quizá sea que las configuraciones con energía mínima tienden a ser simétricas y...

—No, con eso me basta —se apresuró a decir. Y añadió, hojeando el libro—: Pero le recuerdo que también hay virus con otras formas.

De hecho, la otra forma más común para un virus es la helicoidal (figura 6.4), una espiral que se contorsiona formando un tubo, como la ranura de un tornillo o una escalera de caracol. También en este

caso parece tratarse de una configuración de energía mínima para unidades idénticas.

—Oh, mire —dijo—. He aquí una helicoide formada por componentes hexagonales. Influenza C, el virus de Taylor. Vaya, ¿por qué no forma algo esférico en vez de cilíndrico?

—No se puede cubrir una esfera con hexágonos —dije—. No si usted quiere que concuerden como mosaicos, sin superponerse.

—¿Por qué no?

—El teorema de Euler.

—¿Teorema? ¿Teorema? No me agradan esas condenadas cosas, se lo aseguro. ¡Ángulos en la base de un triángulo isósceles... ángulos en la cabeza de un alfiler! Ese tonto de Pitágoras. ¿Imposible? Bah, nada es imposible si uno se empeña. ¿Euler? Qué nombre derrotista. Nunca lo oí nombrar.

—Es el matemático más prolífico de todos los tiempos.

—Eso lo explica.

—Euler demostró que si C es la cantidad de caras de un sólido, V la cantidad de vértices y L la cantidad de lados, entonces $C + V - L = 2$. Ahora bien, si usted tiene un sólido con C caras, todos hexagonales, la cantidad de caras debe ser

$$L = 3C$$

porque cada hexágono tiene seis caras pero cada cara es contigua a dos hexágonos, y la cantidad de vértices es

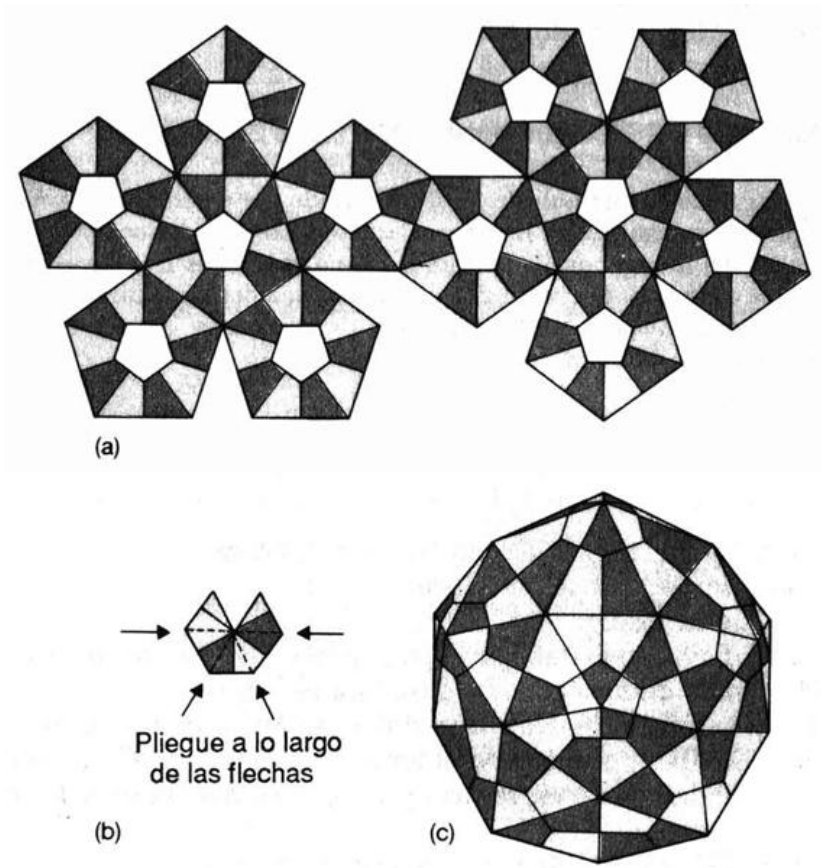
$$V = 2L$$

porque cada cara tiene seis vértices pero cada vértice aparece en exactamente tres caras contiguas. Así que, por el teorema de Euler, tenemos

Recuadro 6.1. Cómo confeccionar un modelo del poliovirus

Copie la figura 65 (a) en un cartón delgado, dejando en cada lado un margen para hacer rebordes. Vuélvalo y marque los límites entre los pentágonos y alrededor del contorno.

Haga doce copias de la figura 65 (b) —un hexágono al que le falta un sector— dejando también rebordes en los lados. Vuélvalo y marque a lo largo de las líneas punteadas. Pliegue y ensamble en doce pirámides de cinco caras, con los rebordes bajo la base. Pegue los rebordes y adhiera las pirámides a los pentágonos blancos de la figura 65(a). Luego pliegue los pentágonos de la figura 6.5(a) y péguelos para formar un dodecaedro con protuberancias piramidales en cada cara, como en la figura 65(c).



65 Use (a) y doce copias de (b) para confeccionar un modelo del virus de la polio (c).

$$C + 2L - 3L = 2$$

Pero en realidad $C + 2C - 3C = 0$. Así que es imposible.

Por un momento quedó impresionado, pero luego meneó la cabeza como un pingüino sacudiendo el plumaje tras una zambullida en el Atlántico Sur, y su semblante adusto se reafirmó.

—Poliovirus, dijo usted.

—Sí. Un equipo de científicos de la clínica Scripps usó cristalografía de rayos X para demostrar que el poliovirus tiene la misma estructura que una pelota de fútbol (recuadro 6.1). De hecho, la estructura general fue sugerida en 1962 por D. Caspar (Fundación para Investigación del Cáncer Infantil, Boston) y Aaron Klug (Laboratorio de Biología Molecular, Cambridge) con fundamentos matemáticos, pero eso no se confirmó hasta 1987.

El doctor, entretanto, había vuelto a una observación anterior.

—Si no se puede cubrir una esfera con hexágonos, ¿qué hay de los

pentágonos?

Bien, desde luego eso es muy interesante. La fórmula de Euler también se puede utilizar para demostrar que si usamos sólo pentágonos, tendrían que ser doce, y el dodecaedro es la única forma posible. El problema es que el dodecaedro no es muy redondeado. Lo cual es una pena, porque las formas esféricas tienden a tener la energía más baja... por eso una burbuja o una gota de agua de lluvia son esféricas.

—Afortunadamente, se puede obtener una forma más redonda —dije— si usted sólo utiliza pentágonos y hexágonos. Entonces necesita exactamente doce pentágonos y el resto deben ser hexágonos...

Recuadro 6.2 Por qué debe haber doce pentágonos

Supongamos que un poliedro está constituido por p pentágonos y h hexágonos, sin otras caras. Entonces $C = p + h$. Los pentágonos tienen lados $5p$, los hexágonos $6h$, así que la cantidad total es $L = (5p + 6h)/2$ porque cada lado se cuenta dos veces, una vez por cada cara a la cual es contiguo. Análogamente, el número de vértices es $V = (5p + 6h)/3$. En la fórmula de Euler,

$$2 = C + V - L = (p + h) + \frac{5p + 6h}{3} - \frac{5p + 6h}{2} = \frac{p}{6}$$

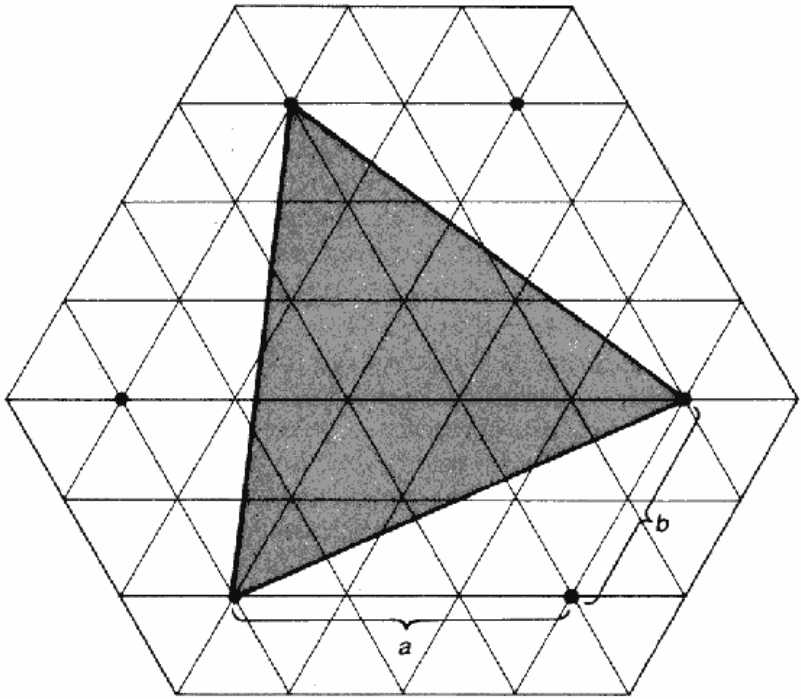
así que p = 12.

—¿Por qué? ¿Por qué no puedo tomar veintitrés pentágonos más los hexágonos necesarios?

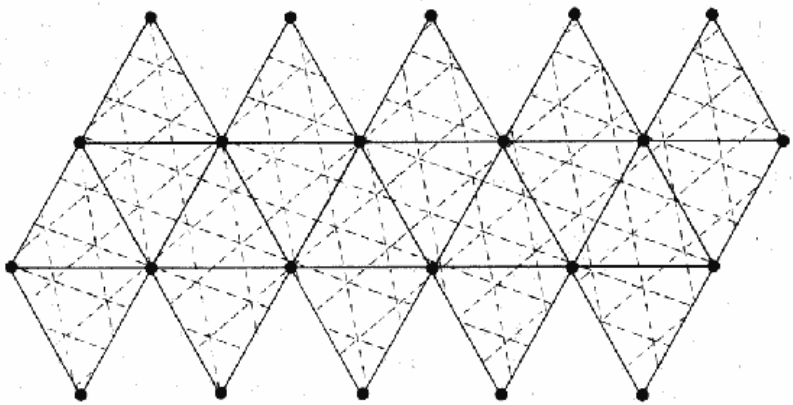
—De nuevo la fórmula de Euler, aunque el argumento es un poco más complejo (recuadro 6.2).

Recuadro 6.3 Seudoicosaedro Goldberg-Caspar-Klug

Comience por cubrir el plano con triángulos equiláteros. Forme grandes triángulos de la siguiente manera. Escoja dos números a y b. Comenzando en un vértice, desplace las unidades a hacia la derecha y las unidades b hacia arriba para formar un segundo vértice. Repita para crear un triángulo grande (figura 6.6 [a]). Ahora una veinte de estos grandes triángulos, aún divididos en los más pequeños triángulos originales, para formar un icosaedro (figura 6.6 [b]). Esta figura, proyectada desde su centro hacia una esfera, da por resultado un sólido cuyas caras son muy semejantes a pentágonos y hexágonos regulares, con $V = 10\ (a^2 + a\,b + b^2) + 2$ vértices. Este es el seudoicosaedro de tipo $\{a,b\}$.



6.6. (a) Unidad triangular básica de un seudoicosaedro de tipo {a,b}.



6.6. (b) Ensamblando veinte unidades básicas para constituir un seudoicosaedro.

—¿Hay límite para la cantidad de hexágonos?

—La fórmula no lo especifica.

—Qué curioso.

—Sí, hay algo extraño en el pentágono. Pero hay restricciones sobre el número de hexágonos si usted quiere lograr formas aproximadamente esféricas. —Hay una elaboración muy hábil, debida a Michael Goldberg e independientemente a Caspar y Klug (recuadro 6.3).

La cantidad de caras, vértices y lados tiene que ser de la forma

$C = 20D$ (doce pentágonos, el resto hexágonos)
$L = 30D$
$V = 10D + 2$

donde D es un número de la forma

$$D = a^2 + ab + b^2.$$

Esto da un sólido “casi regular”, el seudoicosaedro de tipo $\{a,b\}$. Los números “mágicos” $10\ (a^2 + ab + b^2) + 2$ desempeñan un papel muy especial en la estructura de un virus. Son números de unidades idénticas (de moléculas proteínicas) que se pueden combinar de manera “casi regular” para formar una superficie cuasiesférica. La mayoría de los números no tienen esta forma especial. Como indica la tabla 6.1, los únicos números mágicos inferiores a 300 son:

12, 32, 42, 72, 92, 122, 132, 162, 192, 212, 252, 272, 282.

Nótese que todos terminan en 2. ¿Comprende usted por qué? Sus restos en una división por tres parecen ser 0 o 2: ¿esto es correcto, o un número de la forma $3k + 1$ puede ser mágico? ¿Por qué? ¿Puede un número mágico ser un cuadrado perfecto?

Tabla 6.1. Números mágicos de una estructura virósica

$10\ (a^2 + ab + b^2) + 2$			

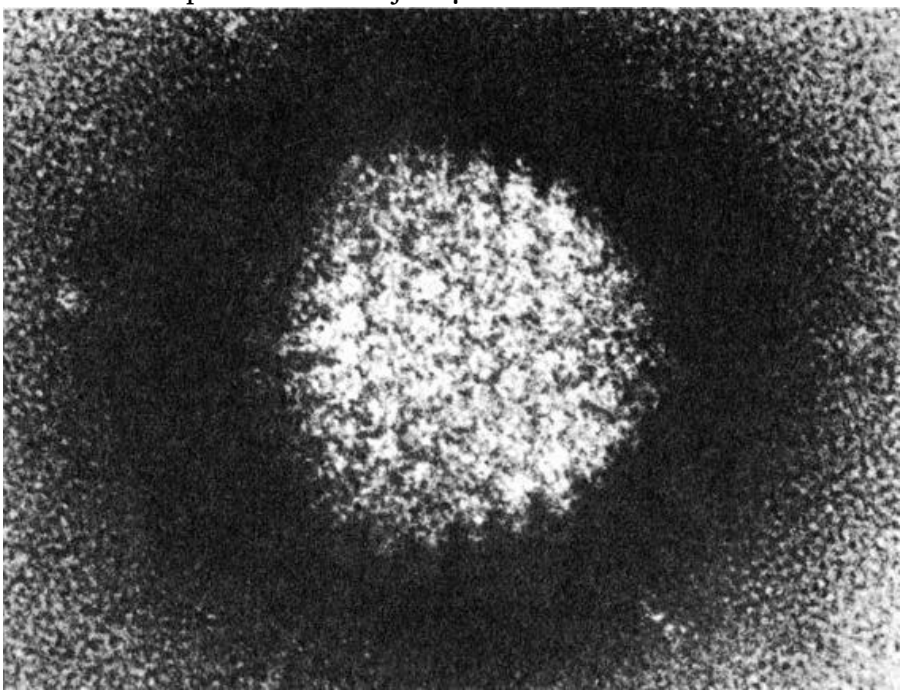
—Descabellado —dijo el médico—. ¿Cree usted que la matemática puede gobernar a la madre naturaleza? Le diré de qué sufre usted, amigo mío. Hybris, eso es. Y Némesis se vengará, cobrando la forma de este libro de datos virósicos. Veamos... Esto bastará: *herpes simplex,* el virus del herpe labial... ¡162 unidades!

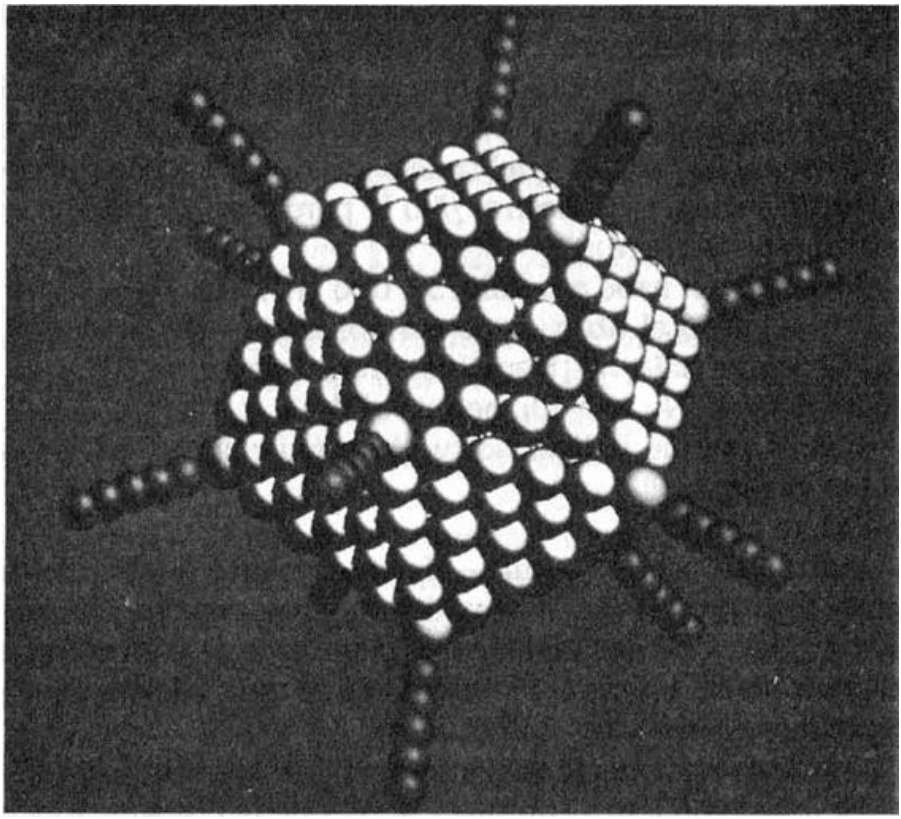
—Tipo {4,0} —dije

—¿Qué? Veamos. Conque... Tiene que ser una coincidencia. Bien, el siguiente le pondrá un palo en la rueda... adenovirus del pollo... 252 unidades.

—Tipo {5,0}. (Figura 6.7)

—¡Verruga humana! —exclamó. Varias interpretaciones me cruzaron la mente. ¿Otro insulto colosal? ¿Una oblicua referencia a su nariz? En absoluto. Había encontrado otro virus, y no estaba feliz con el resultado—. ¡Demonios! Es 72... eso es tipo {1,2}. Virus BK... no, también 72. Papiloma del conejo... ¡De nuevo 72!





6.7 Adenovirus tipo 12, una disposición tipo {5,0} de unidades proteínicas esféricas. Para hacer un modelo similar usted sólo necesita 252 pelotas de tenis (más 60 para los "erizos"), varios tubos de material adhesivo, ingenio y perseverancia [fotografías, Science Photo Library].

—Ese es tipo {2,1} —dije—. El tipo {*a,b*} es el reflejo simétrico del tipo {*b,a*} cuando $a \neq b$. ¡Oh, no es tan sorprendente! Los virus de la verruga humana y el papiloma del conejo son casi idénticos, excepto que uno es zurdo y el otro es diestro. ¿No le parece un fascinante ejemplo de evolución convergent...?

—Mosaico del nabo amarillo, 32, tipo {1,1} Virus REO... vaya, 92. Tipo {3,0}. —Hojeó el libro como un poseído—. Ah, uno realmente grande. Tiene que fallar... ¡Hepatitis canina infecciosa! 362.

—Miró mi lista—. ¡No está allí, no está allí!

—Eso es porque la lista no fue lo suficientemente lejos —repliqué —. Vea el tipo {6,0}.

Soltó un bufido.

—Aun la naturaleza —dije— debe someterse a restricciones matemáticas. Siempre que la matemática sea una descripción adecuada de la naturaleza... Lo cual, desde luego, es tema de controversia. Pero la combinatoria de estructuras repetitivas es muy

básica, y no es sorprendente que aparezca en el mundo real.

"Los mismos números mágicos aparecen si usted trata de juntar esferas. Si usted comienza con una esfera, puede ponerle doce alrededor. La próxima capa debe tener cuarenta y dos esferas. Luego siguen capas de 92,162, 252 y así sucesivamente. Buckminster Fuller pensaba que era muy excitante. Sugirió que el 92 debía de tener propiedades místicas... Por ejemplo, el elemento noventa y dos es el uranio. Y vaya si es especial.

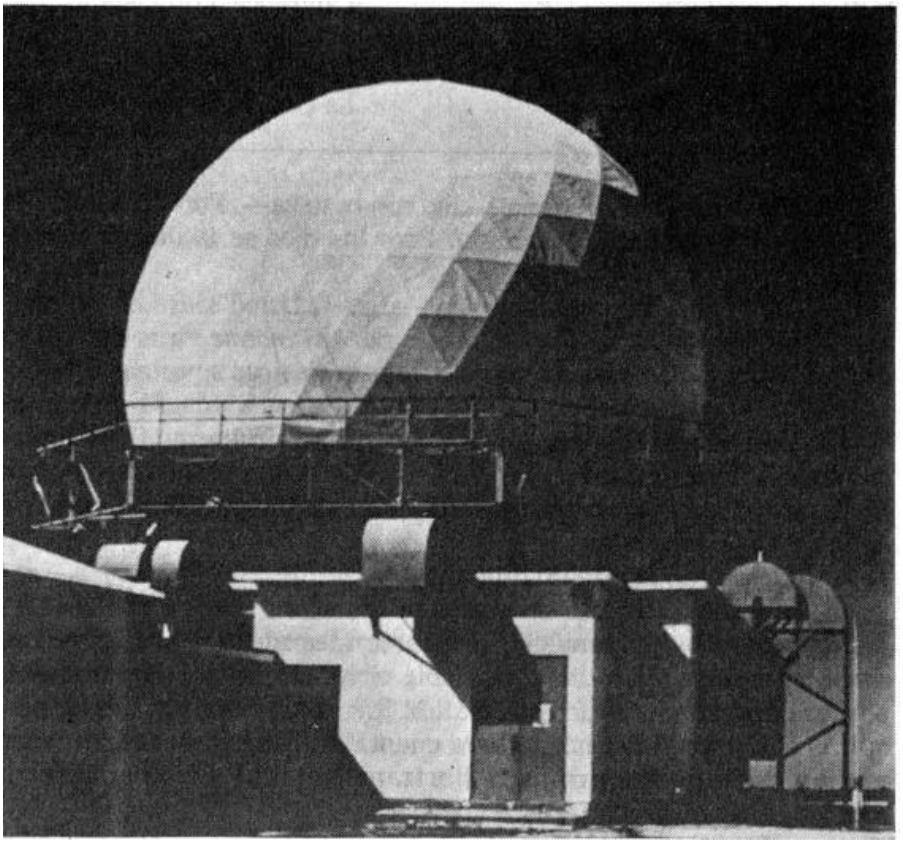
—¿Buckminster Fuller? ¿No era arquitecto?

—Correcto. Pero se inspiró mucho en la matemática. Diseñó cúpulas geodésicas, esferas construidas a partir de diseños triangulares (figura 6.8), según los mismos principios que las formas del virus Goldberg-Caspar-Klug (tabla 6.2).

"Las mismas ideas también son importantes en química —añadí, pues ahora contaba con toda la iniciativa—. Los químicos han sintetizado moléculas orgánicas uniendo átomos de carbono en las mismas clases de patrón. Creen que el icosaedro trunco reviste especial importancia porque quizá se forme naturalmente en el espacio, entre los astros. Esa molécula se denomina 'Buckminsterfullerana' (figura 6.9) en honor del inventor de las cúpulas geodésicas. O a veces 'futboliana'. Para honrar... eh... al inventor de las pelotas de fútbol...

—Buckminsterfulleriana —dijo con tristeza—. Futboliana.

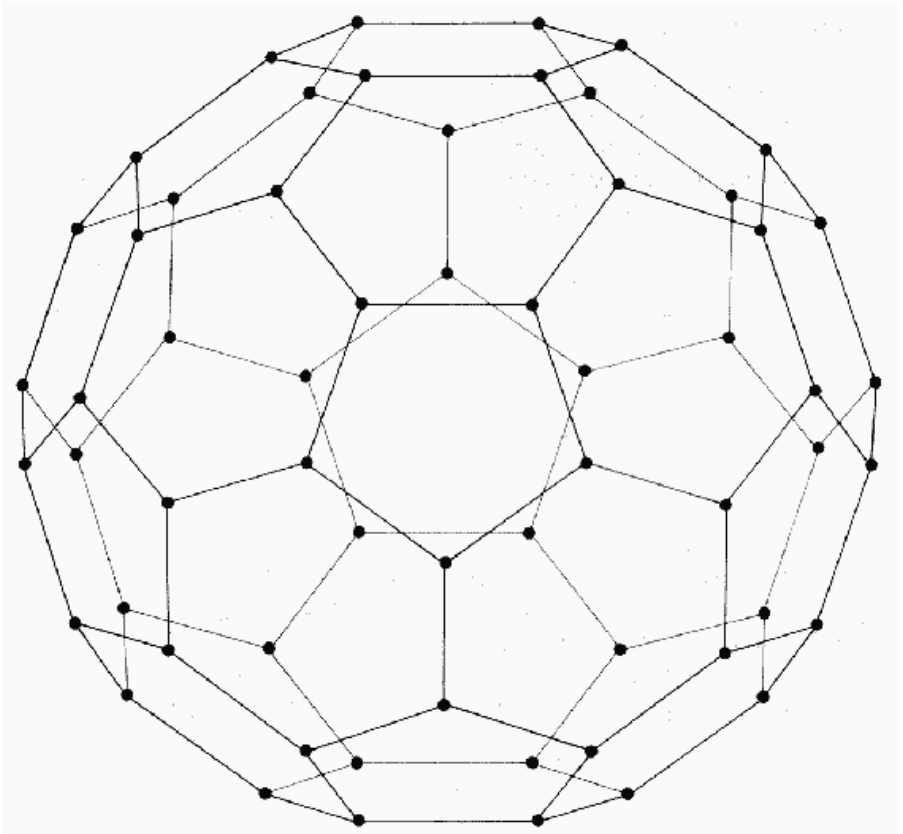
Agachó la cabeza derrotado. Pero los ojos se le iluminaron de pronto.



6.8 Cúpula geodésica [fotografía, Science Photo Library].

Tabla 6.2 Seudoicosaedros: virus y cúpulas geodésicas

	cúpula geodésica	*virus*
Instituto Amarillo, Baffin Island	{1,1}	
bacteriófago ΦR	{2,0}	
papiloma del conejo	{2,1}	
verruga humana	{1,2}	
USS Leyte	{2,2}	
cuartel de oficiales de la Fuerza Aérea de los EE.UU. en Corea	{3,0}	
Mount Washington	{4,0}	
pabellón EE.UU., Kabul	{5,0}	
cúpula de radar de la línea ártica DEW	{6,0}	
Lawrence, Long Island	{8,8}	
pabellón EE.UU., Expo 67, Montreal	{16,0}	
La Géode, París	{18,0}	



6.9. Una jaula de átomos de carbono forma el esqueleto básico de la molécula buckminsterfulleriana. Compárese con la figura 6.1.

—Tengo su diagnóstico, joven —dijo—. Usted sufre de *pedodontia,* el Mal del Pie en la Boca, causado por un *enorme* virus con forma de icosaedro. Si no se trata a tiempo, lleva a clásicos síntomas de cabeza hinchada, que se debe tratar instalando una válvula de drenaje en la caja craniana. Ahora bien, la cura para un virus grande es obviamente una inyección muy grande. —Y extrajo una jeringa larga como mi brazo, parecida a esas cosas con que se rocían los árboles para matar mangas de langostas.

—De pronto me siento mucho mejor —dije.

—¡Tonterías! Un rápido pinchazo...

—¡Espere! —exclamé—. Tengo una idea mejor. —De pronto recordé un informe paródico que había circulado un par de años atrás por los departamentos de matemática. Era una broma, por cierto, pero quizás el doctor Cruel no se diera cuenta—. ¡Espere! Acabo de recordar un trabajo del profesor Bertram Kostant del Instituto de Tecnología de Massachusetts.

—¿Y?

—Usó un análisis matemático del icosaedro para calcular sus frecuencias vibratorias naturales. ¡Usted necesita un láser de frecuencia variable!

—¿Para qué necesito un láser?

—Podría sintonizarlo en la frecuencia precisa en que el virus se hará pedazos. ¡Como una copa de vino astillada por vibraciones simpáticas cuando alguien canta la nota adecuada!

—¿Y qué haría yo con este láser si lo tuviera? —preguntó.

—Me lo metería en mi nariz y lo encendería —dije.

Soluciones

Los números mágicos son todos de la forma $10\,(a^2 + ab + b^2)$, y como cualquier múltiplo de 10 termina con el dígito 0, los números mágicos deben terminar con el dígito 2.

Los números mágicos de la forma $3k + 1$ no existen. Para ver por qué, calcule los posibles valores de $a^2 + ab + b^2$ (mod 3):

a	0
b	
0	0
1	0
2	0

Vemos que sólo surgen los valores 0 y 1. Cualquier número mágico $10\,(a^2 + ab + b^2) + 2$ se transforma en $1\,(a^2 + ab + b^2) + 2$ (mod 3), porque $10 = 1$ (mod 3). Esto es sólo $a^2 + ab + b^2 + 2$, que es o bien $0 + 2 = 20$ bien $1 + 2 = 0$ (mod 3).

Ningún número que termine en el dígito 2 puede ser un cuadrado perfecto, así que los números mágicos al cuadrado no existen.

Otras lecturas

H. S. M. Coxeter: 'Virus Macromolecules and Geodesic Domes", *A Spectrum of Mathematics: Essays presented to H. G. Forder,* John Butcher (comp.), Oxford, Oxford University Press, 1967.

H. M. Cundy y A. P. Rollett: *Mathematical Models,* Oxford, Clarendon Press, 1961.

James M. Hogle, Marie Chow y David J. Filman: "The Structure of Poliovirus", *Scientific American* (marzo 1987), págs. 28-35.

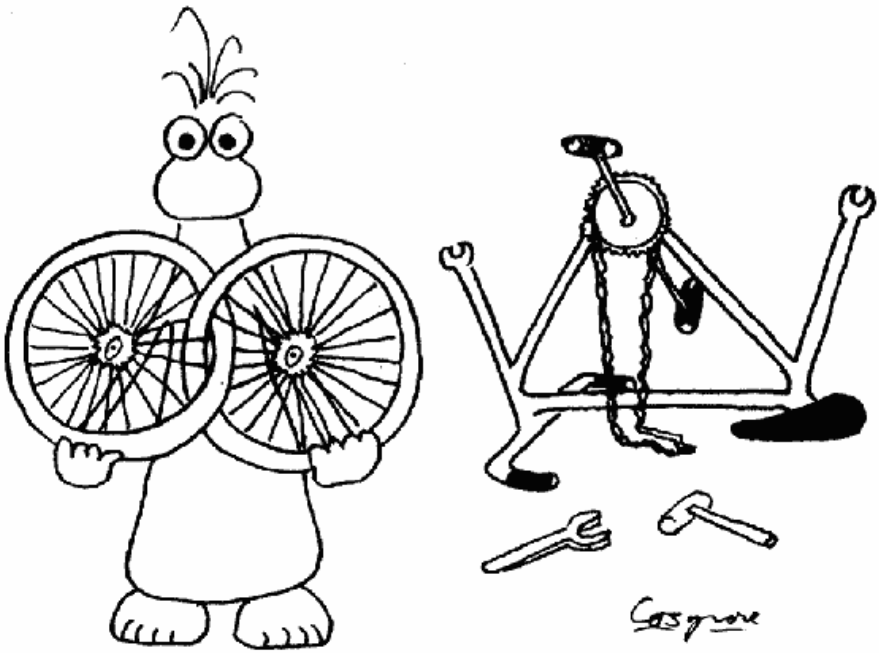
C. R. Madeley: *Virus Morphology,* Edimburgo, Churchill & Livingstone, 1972.

James Meller (comp.): *The Buckminster Fuller Reader,* Harmondsworth, Penguin, 1972.

Peter Pearce: *Structure in Nature is a Strategy for Design,* Boston, MIT Press, 1978.

D'Arcy Thompson: On *Growth and Form,* Cambridge, Cambridge University Press, 1942.

7. Truco de paridad



Miré por la ventanilla y vi pasar un árbol a más de cien kilómetros por hora. Pero eso es normal cuando se viaja en tren. El compartimiento estaba casi vacío. Aparte de mí, sólo había un hombre con pantalones negros, sandalias negras y pies descalzos. No pude ver el resto, que estaba oculto detrás de un periódico.

Miré mi reloj de pulsera y decidí que era hora de almorzar. Saqué del bolso una hogaza, una naranja, una banana, una botella de vino y —muy importante— un sacacorchos.

Acababa de comer el pan y empinar buena parte del vino cuando noté que el hombre de ropa negra me observaba por un orificio que había abierto en el periódico. Esto era perturbador. ¿Era un detective privado? ¿Un policía de paisano? ¿Un miembro de la KGB? Traté de recordar mis posibles delitos y comencé a deslizarme hacia la puerta. Fue entonces cuando me robó la banana.

Mientras yo dudaba entre recobrar mi propiedad y correr hacia la

libertad, el extremo de la banana asomó por el orificio del periódico.

Como dicen algunos, la curiosidad mató al gato, y al gato le quedaban ocho vidas más. Pero el asunto era demasiado extraño.

—¿Qué hace usted con mi comida? —pregunté.

El periódico bajó descubriendo una cara delgada con gafas y pelo largo. El hombre usaba una capa negra y tenía una cadena de madera colgada del cuello; llevaba una extraña varilla con espirales talladas y una hendidura en la parte superior, como cuernos de diablo. Al margen de las gafas, lucía como un profeta del Antiguo Testamento.

—Estaba empujando la banana a través del orificio —dijo—. Le apuesto 5 libras a que usted no puede empujar la naranja.

—¡Claro que no! ¡El orificio es muy pequeño!

Sonrió.

—Si logro empujar la naranja a través del orificio, ¿usted me debe 5 libras?

—Siempre que usted no rasgue él papel ni corte la naranja, desde luego —repliqué.

Cogió la naranja y la acercó al orificio con una mano. Con la otra metió un dedo en el orificio y le dio un empellón a la fruta.

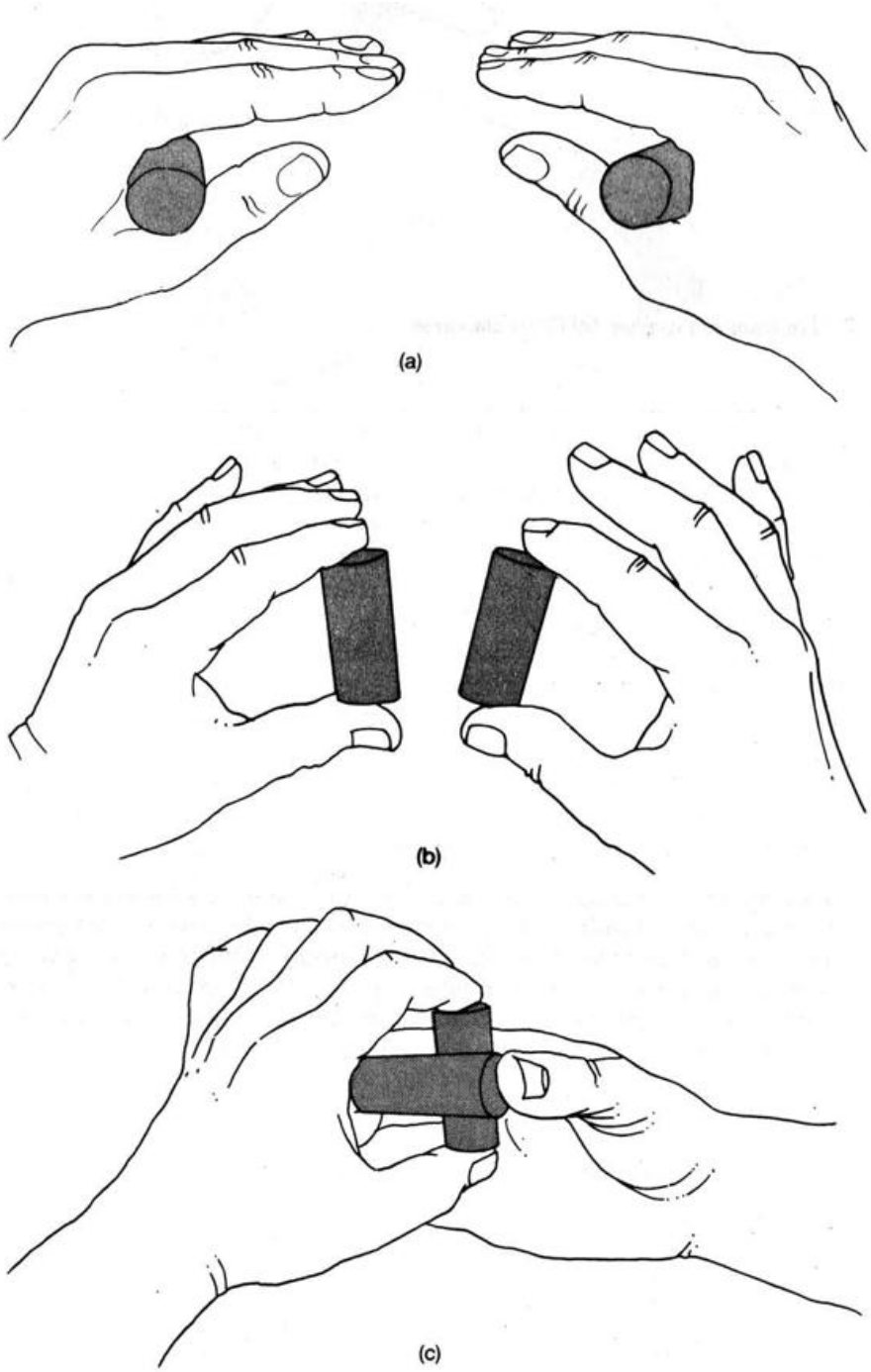
—¡Ahí está! Tal como prometí, empujé la naranja a través del orificio.

Debí haber tenido la sensatez de no aceptar una apuesta tramposa. Abrí la billetera y transferí parte de su contenido a la palma del sujeto. El extrajo una segunda botella de vino y me pidió prestado el sacacorchos.

Era un modo curioso de iniciar una amistad, pero así fue como conocí a Matthew Morrison Maddox. Maddox es un mago profesional, y se especializa en trucos que tienen características matemáticas. De allí su nombre escénico, que él suele escribir “Matt M. Maddox”. Me dijo que esa varilla, que él mismo había tallado, se llamaba “palillo de pulgar”: se coge metiendo el pulgar entre los dos diminutos cuernos.

Desdeñaba a los magos que utilizaban equipos grandes y complicados para cortar a mujeres en dos o hacer desaparecer elefantes de jaulas de vidrio. A su entender los mejores trucos eran los que usaban aparatos simples.

—Por ejemplo, tomemos estos corchos —dijo—. Vea cómo los sostengo entre el pulgar y el índice de cada mano, así (figura 7.1 [a]). Ahora, usando el índice y el pulgar de la izquierda, cojo los dos extremos del corcho con la mano derecha; y usando el índice y el pulgar de la mano derecha simultáneamente cojo los dos extremos del corcho con la mano izquierda. —Unió ambas manos, las separó, y cada mano asía un corcho (figura 7.1 [b])—. Ahora hágalo usted.



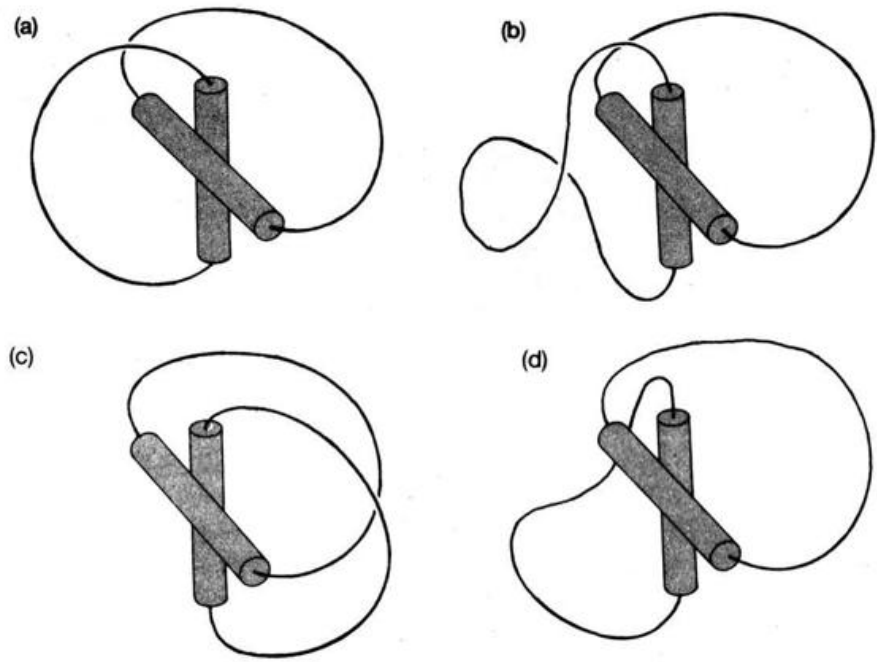
7.1. Un truco con corchos, (a) Posición inicial, (b) Posición final, (c) Cómo atascarse.

—Fácil —dije, cogiendo los corchos entre los dígitos. Pero cuando intenté separar las manos, los dos corchos no se separaban (figura 7.1[c]). Me mostró el truco varias veces, pero yo no captaba cómo lo

hacía por mucho que lo observara—. Cuando yo intento hacerlo, están eslabonados —me quejé—. ¿Cómo logra usted separarlos? No lo entiendo. —El me miró con aire inescrutable.

Déjate de tonterías y usa el pensamiento lógico, me dije. Empecé a dibujar diagramas para demostrar cómo se enredaban los corchos y mis dedos.

Esencialmente, la disposición que yo obtenía era como la figura 7.2(a). Cada sistema mano + corcho forma un rizo cerrado, y los dos sistemas mano + corcho están eslabonados.



7.2. Estructura abstracta del truco. Sólo (d) da resultado.

—Es topología, ¿verdad? —dije. Asintió, pero guardó silencio—. Tengo que mover los dedos para que no formen un eslabón... Veamos... ¿Así? —Dibujé la figura 7.2(b)—. No, qué tonto, siguen eslabonados. ¿Quizá la figura 7.2(c)? No, el mismo problema... ¡Ajá! Si lo hago de este modo (figura 7.2[d]) entonces los dos rizos se separan. Ahora, déjeme probar con los dedos... Vaya, qué complicado, ¿eh? Perdón, creo que me disloqué el pulgar.

Entonces se apiadó de mí.

—Tiene razón en cuanto al eslabonamiento —dijo—. Básicamente es un problema topológico. Pero en topología usted puede estirar las cosas tanto como desee, o curvarlas en cualquier dirección concebible. No ocurre lo mismo con los pulgares, como usted acaba de descubrir. Así que tiene que hallar un modo de poner los índices y pulgares en

los lugares adecuados sin causarse ningún daño. —Entonces me mostró cómo alinear bien los pulgares, y extender los índices *alrededor*.

7.3. Cómo separar los corchos.

Practiqué los movimientos varias veces hasta que me salieron con naturalidad.

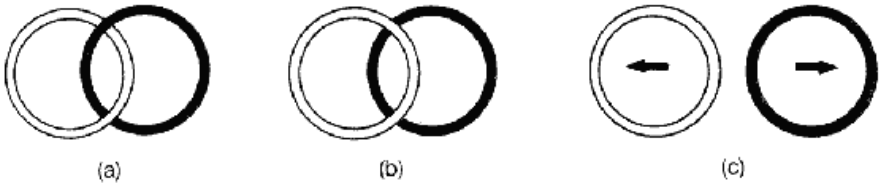
—¡Vaya! ¡Buen truco de prestidigitación!

—En realidad es un truco de *paridad* —dijo—. Esa es la clave. Mire esta cadena. —Me pasó la cadena que le colgaba del cuello. Tal como yo había creído, era de madera. Cada eslabón era perfecto y no presentaba roturas.

—¿Cómo unió los eslabones? —pregunté.

—¿Usted cree que tallé eslabones de madera por separado y luego los uní, tal como un joyero con una cadena de metal? Imposible, amigo. No, empecé con una pieza de madera maciza y tallé la cadena de tal modo que ya quedó eslabonada. Lo cual nos lleva a un principio matemático fundamental.

"Si tomo dos círculos en el espacio, pueden estar *eslabonados* (figura 7.4[a]) o *no eslabonados* (figura 7.4[b]). Si no están eslabonados, puedo separarlos del todo (figura 7.4[c]). La única diferencia en las dos primeras figuras es que un cruce se efectúa por encima y otro por debajo... pero ese cambio ínfimo significa que usted no puede deshacer el eslabón resultante.



7.4. Dos círculos pueden estar eslabonados (a) o no eslabonados (b), y sólo los círculos no eslabonados se pueden separar (c).

—He visto magos que separaban anillos de metal eslabonados en escena.

—Sí. Y está impresionado porque sabe que es imposible. Sabe que tiene que haber un truco, pero no puede deducirlo, ¿verdad?

—Verdad.

—Y yo no pienso contarle. Valoro demasiado mi pertenencia al Círculo Mágico.

—Siempre me pregunté si hay un modo especial de mover los anillos.

—No, son anillos trucados, al menos le revelaré eso. Tienen que serlo, porque se puede *probar* matemáticamente que dos anillos eslabonados no se pueden separar. Es imposible mover los círculos de la figura 7.4(a) para obtener la figura 7.4(c) mediante una *deformación continua.* Eso significa que usted no puede romper los círculos ni hacerlos pasar uno a través del otro: sólo puede estirarlos, comprimirlos y curvarlos. De paso, aunque se les haya distorsionado la forma, un topólogo aún los considera círculos... y yo también.

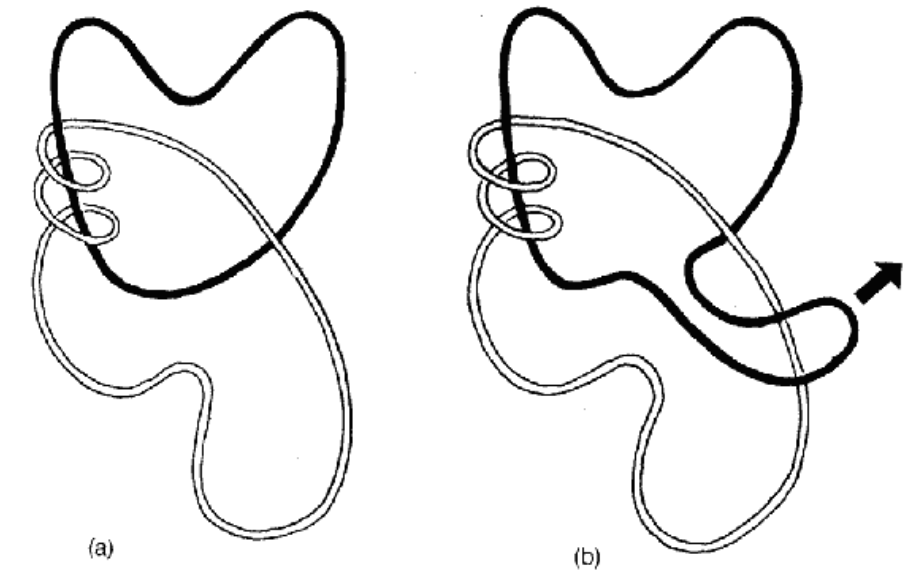
—Siempre supe que era imposible —dije—, pero no sabía que se podía probar.

—Entonces está de suerte, porque se lo mostraré. La idea es hallar una propiedad de los círculos eslabonados que no cambie cuando están continuamente deformados, pero la cual no posea los rizos no eslabonados. ¿Se le ocurre alguna?

Me devané los sesos.

—Eh... ¿Estar eslabonados?

—Brillante, pero no demasiado útil. Aunque le estoy pidiendo que razone sobre círculos, no aceptaré razonamientos circulares. Quiero algo más definido. Tal vez le ayude mirar un ejemplo. —Dibujó las figuras 7.5(a) y (b)—. ¿Acepta que usted puede deformar estos dos eslabones hasta darles la forma continua del otro?



7.5. Dos eslabones se pueden distorsionar para que cada cual cobre la forma del otro.

—Sí... se saca un pequeño rizo del círculo negro y se inserta en la parte superior del blanco.

—¡Excelente! Y si le doy cualquier par de círculos, todos enredados... digamos de color blanco y negro, por si necesitamos saber cuál es cuál... ¿existe otro modo de usar una deformación continua para cambiar el modo en que uno de ellos se superpone al otro?

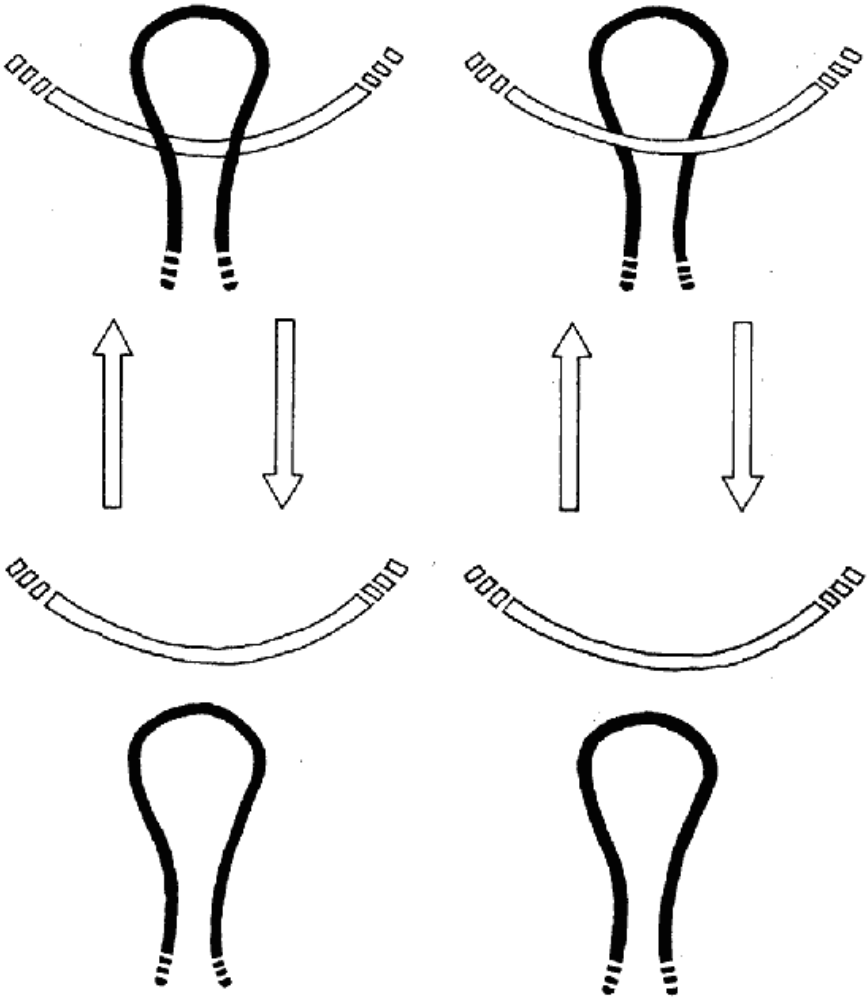
—Bien, usted puede deshacer el movimiento del cual hablábamos, pero no se me ocurre nada... Oh, podría empujar un pequeño rizo del círculo negro por *debajo* del blanco.

—Bien.

—O deshacer ese movimiento, también.

—Excelente. Así que hay sólo cuatro tipos de movimiento que cambian el modo en que un círculo se cruza con el otro. Llamémoslos *movimientos básicos.* O bien introducimos un rizo, o bien lo retiramos (figura 7.6). En cuanto concierne a la superposición de los círculos, toda deformación continua sigue una serie de movimientos básicos, ¿de acuerdo?

—De acuerdo.



7.6 Los cuatro movimientos básicos que cambian el modo en que se superponen dos círculos.

—Ahora, quiero que usted piense en la cantidad de cruzamientos. ¿Cómo altera eso con un movimiento básico?

—Suma dos. O sustrae dos. ¡Oh, entiendo! Si el número de cruzamientos es par, tiene que permanecer par. Si es impar, tiene que permanecer impar. —Ahora me estaba entusiasmando—. Para dos rizos no eslabonados, como la figura 7.4(c), no hay cruzamientos, y el cero es número par. Pero para dos rizos eslabonados, hay dos cruzamientos y... ¡Oh, demonios!

—Dos también es número par.

—Sí. Qué lástima. No funciona. Si hubiera sido un número impar para un par de círculos eslabonados, habría resultado. Pero no se puede transformar un número impar en cero sumando o restando dos;

tiene que permanecer impar.

Asintió.

—Está llegando. Piense en la cantidad de cruzamientos donde el círculo negro va por encima del blanco. Ignore aquellos donde va debajo.

—Veamos, pues... Bien, si realizo un movimiento básico que haga pasar un rizo de círculo negro sobre el blanco, sumo dos a ese número. Si deshago el movimiento, resto dos. Si hago el otro tipo de movimiento básico, pasar un rizo bajo el círculo blanco... el número permanece igual. ¡Magnífico! Conque el número de veces que el círculo negro va por encima del blanco permanece igual o bien cambia de a dos. Si empieza par, permanece par; si empieza impar, permanece impar... ¡sí! Y en cuanto a la figura 7.4(c), es cero, que es par; pero para la figura 7.4(b) es uno, que es impar.

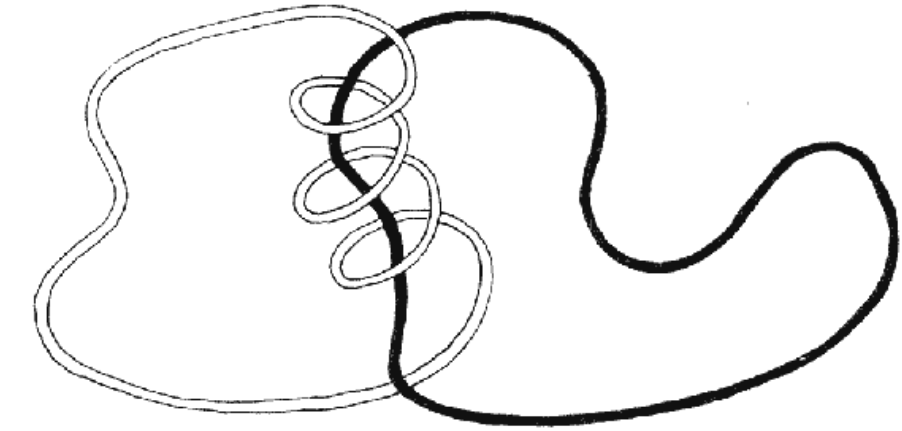
—Y ésa es la demostración —dijo Maddox—. Es uno de los trucos favoritos del topólogo... enfrentar pares y nones. Le sorprendería el potencial de esta idea. Pero esto involucra una idea aun más potente. Usted acaba de definir una invariante topológica. Eso es algo que se puede calcular, y que permanece igual a pesar de una deformación continua. Si usted toma dos objetos para los cuales la invariante es diferente, obviamente no puede deformar uno para darle la forma continua del otro.

—De lo contrario la invariante sería la misma... y no lo es. ¡Astuto!

—Aquí la invariante es la paridad del número de veces que el círculo negro pasa por encima del blanco. La paridad de un número consiste en su calidad de par o impar. A eso me refería al decir que era un truco de paridad. No tan fácil de concebir, ¿eh? Y la mayoría de las invariantes en topología son mucho más difíciles de hallar que nuestra invariante de paridad.

Trazó otro diagrama (figura 7.7).

—He aquí un caso. Para este par de círculos, la cantidad de veces que el círculo negro cruza sobre la parte superior del blanco es cuatro, así que la invariante de paridad es “par”. También lo es la invariante de paridad de dos círculos no eslabonados. ¿Eso significa que podemos deshacer el eslabonamiento?



7.7. Un eslabonamiento con invariante de paridad par. ¿Se puede deshacer?

—Sí, desde luego. Déjeme tratar... Hmm, es difícil verlo... No sé.

—Lo diré de otro modo. Si usted ve un pájaro negro y un pájaro amarillo, no pueden pertenecer a la misma especie. Pero si usted ve dos pájaros negros, ¿eso significa que pertenecen necesariamente a la misma especie?

—No. Podrían ser dos variedades de cuervo.

—Correcto. El color es una invariante de las especies avícolas... bien, siempre que ignoremos a criaturas como las cotorras australianas, que pueden venir en varios colores. Las aves de diferentes colores son necesariamente de diferentes especies, pero las aves del mismo color pueden no ser de la misma especie. Aunque quizá lo sean: el color no es una invariante suficientemente buena para zanjar la cuestión.

"Asimismo, si dos eslabones tienen invariantes diferentes, tienen que ser topológicamente diferentes; pero eso no significa que sean topológicamente similares si tienen la misma invariante. Así que ni siquiera la paridad significa que podemos deshacer el eslabón; significa que la invariante paridad no es suficiente para demostrar que no podemos.

Me resultó más difícil aplicar el razonamiento a los eslabones que a los pájaros, y se lo dije.

—De acuerdo, le daré otra analogía matemática. Supongamos que "cuatroformo" números sumando o restando 4 una y otra vez. Quiero saber si puedo cuatroformar 3 transformándolo en 5. Ahora la paridad del número es de nuevo una invariante: sumar y restar 4 mantiene impares los números impares y pares los números pares. Y 3 y 5 tienen la misma paridad. ¿Puedo cuatroformar 3 volviéndolo 5?

—Bien... 3 + 4 es 7, no sirve... 7 + 4 es 11; luego resto de nuevo 4 para obtener... cuernos, de nuevo 7...

—Exacto, y de hecho no se puede hacer. Pero la paridad no es una invariante suficientemente potente para demostrarlo. Hay una mejor. Puedo asignar a cada número una invariante igual a 0, 1, 2 o 3; a saber, su resto cuando lo divido por 4. Llamémoslo *cuadruplexidad,* por analogía con "paridad".

—Ah —dije sabiamente—. Módulo aritmético 4.

—Bien. Ahora, usted puede verificar que la cuadruplexidad es también una invariante bajo cuatroformación. El número 3 tiene cuadruplexidad 3, pero el 5 tiene cuadruplexidad 1. Así que no se los puede "cuatroformar" uno en otro. ¿Entiende lo que hice?

—Todavía estoy confundido.

—La invariante original, la paridad, no bastaba para distinguir el 3 del 5. Ambos tienen la misma paridad. Pero al hallar una invariable mejor, a saber la cuadruplexidad, puedo demostrar que en realidad no se los puede cuatroformar, deformando uno para formar el otro.

—Entiendo.

—Lo cual significa que hay que tener cuidado con las invariantes. Se las puede usar para discernir la diferencia entre las cosas, cuando funcionan; pero cuando no funcionan, eso no significa que ambas cosas sean similares.

—Entiendo. ¿Hay algo mejor que la cuadruplexidad? Por ejemplo, la *octuplexidad,* el resto en las divisiones por 8, o la *hexadecuplexidad*... Oh no, eso no...

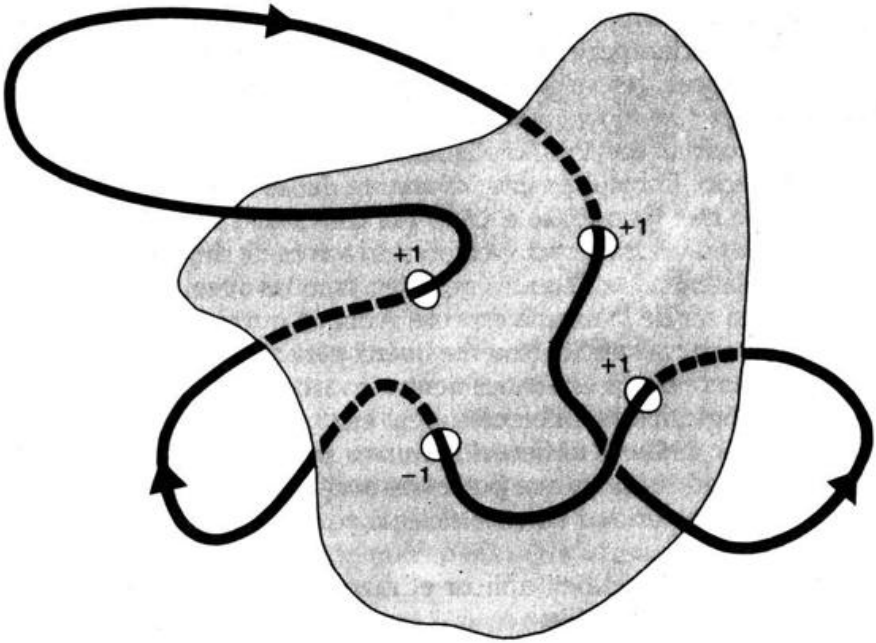
—Cálmese, se está excitando demasiado. No, la cuadruplexidad es una invariante completa. Es tan buena que dos números se pueden cuatroformar uno en otro siempre y cuando tengan la misma invariante de cuadruplexidad.

—Sí, pero la octuplexidad será una invariante mejor si "ochoformo" números sumando o restando 8 repetidamente...

—Concéntrese en el problema, está entrando en una fase maniática.

Así era. Al fin empecé a ver la luz.

—Usted me está diciendo que hay una invariable mejor que la paridad para los eslabones, y eso me indica que no puedo modificar la figura 7.7 convirtiéndola en la figura 7.4 (c). Déjeme adivinar: ¿cuadruplexidad del número de cruzamientos?



7.8. Calculando el número de eslabonamiento.

—No, no es tan fácil. Lo que necesita es una de las primeras invariantes topológicas jamás descubiertas, y se llama *número de eslabonamiento*. Lo descubrirá si imagina una membrana tendida sobre el círculo blanco como un círculo de papel. Usted pone una flecha sobre el círculo negro y ve por dónde atraviesa la membrana, siguiendo la dirección de la flecha a lo largo del círculo. Si pasa de atrás hacia adelante, usted cuenta +1, si pasa de adelante para atrás usted cuenta –1. Luego suma esos +1 y –1 en todos los lugares donde el círculo negro atraviesa la membrana.

"Por ejemplo, en la figura 7.8, con la flecha como está, el círculo negro atraviesa la membrana tres veces de atrás para adelante y una vez de adelante para atrás, de modo que el número de eslabonamiento es 1 + 1 + 1 – 1 = 2.

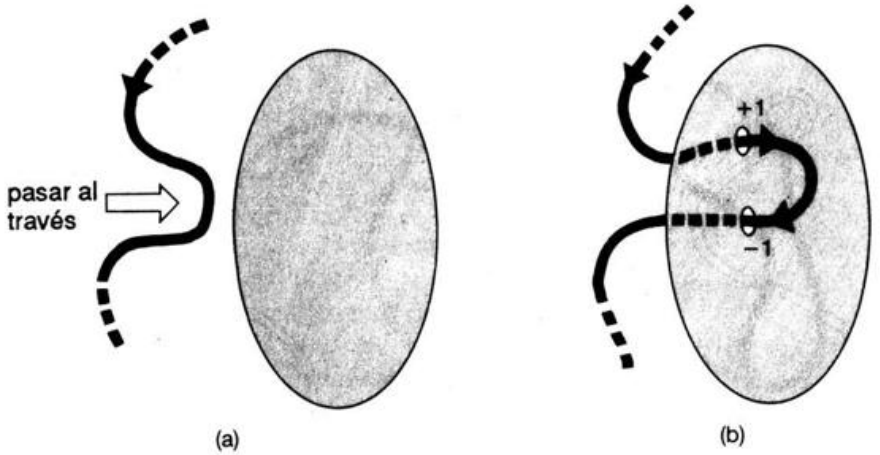
—Interesante —dije—. Es como contar cuántas veces el círculo negro envuelve al blanco.

—Bien. El número de eslabonamiento es una invariante. Usted tiene que elegir cómo alinear la flecha, y si invierte la flecha, el número de eslabonamiento cambia de signo, de modo que después de calcularlo usted debería pasar al signo + para mayor seguridad. Pero eso es fácil de hacer. La pregunta es si usted ve por qué es una invariante.

—No —le dije. Creo en las conversaciones francas.

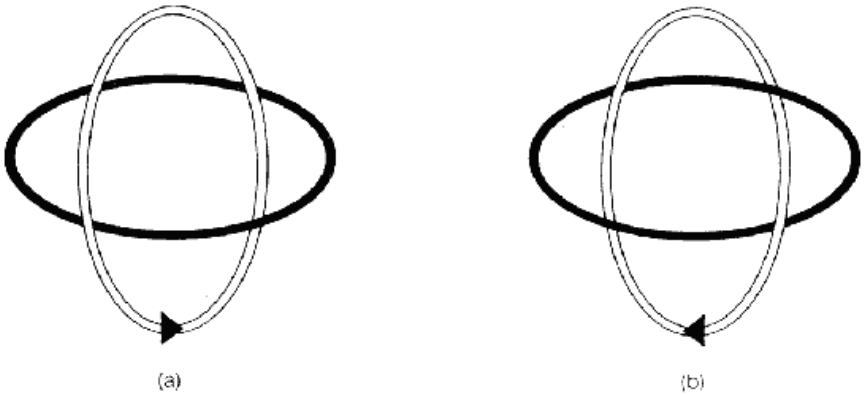
—Básicamente se trata del mismo truco. El único modo de cambiar

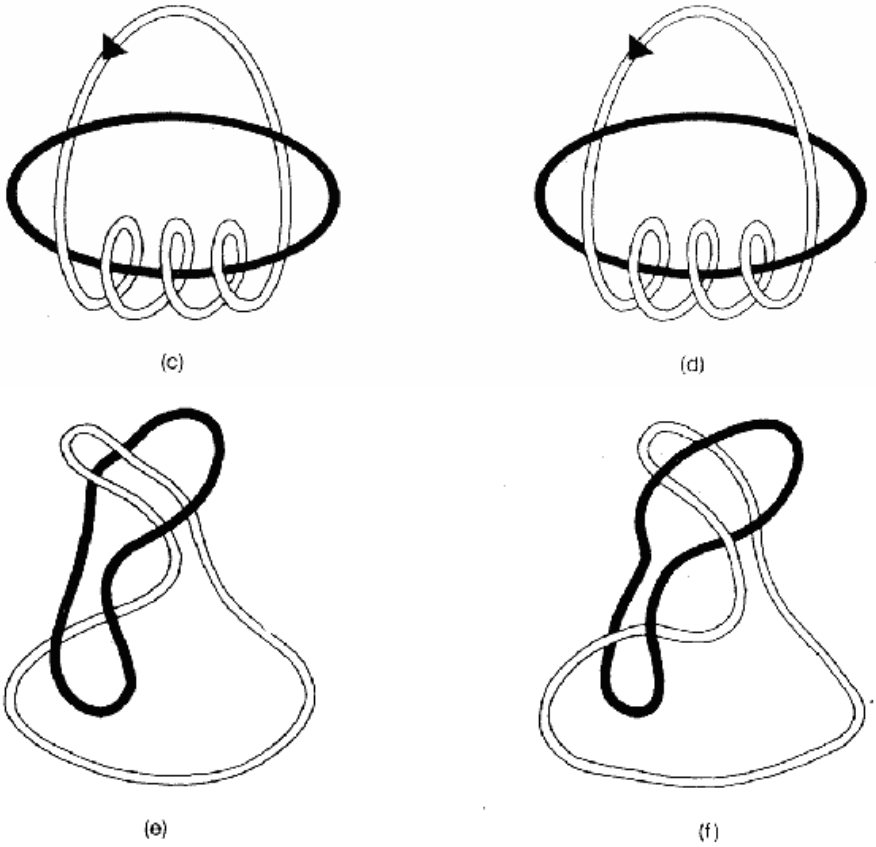
el número de eslabonamiento es mediante la creación o destrucción de dos puntos de corte pasando un rizo en la figura 7.9. Pero cuando miramos las direcciones...



7.9. El número de eslabonamiento permanece inalterado si se crea o destruye un par de puntos de corte.

—¡Vemos que los dos puntos cuentan como +1 y –1, porque las direcciones son opuestas! —Las palabras me salieron a borbotones, pues lo veía con toda claridad—. ¡Conque cuando sumamos para obtener el número de eslabonamiento se cancelan entre sí! ¡Y eso significa que el número de eslabonamiento no cambia!





7.10. Seis eslabones. Dos son susceptibles de transformación mutua. ¿Cuáles?

—Exacto. ¿No es asombroso que haya que tomarse tanto trabajo para explicar algo tan obvio? Pero en realidad no es obvio. La experiencia nos dice que es verdad, pero no nos brinda razones lógicas que expliquen por qué *tiene* que ser verdad.

La figura 7.10 muestra seis eslabones. ¿Puede usted calcular sus números de eslabonamiento? Dos de ellos se pueden deformar convirtiéndolos uno en otro: ¿cuáles?

Pregunté si el número de eslabonamiento es una invariante completa. Si dos eslabones tienen el mismo número de eslabonamiento, ¿es posible convertir continuamente uno en el otro? Matt M. Maddox señaló que quizá valiera la pena analizar un caso en particular:

—¿Podemos hallar dos círculos, con número de eslabonamiento cero, que empero no se puedan separar?

Si podemos, el número de eslabonamiento no es una invariante completa. De hecho, no lo es. Sin embargo, hay nuevas invariantes de eslabonamiento, una de las cuales fue descubierta simultáneamente

por cinco grupos independientes de matemáticos, y una de las cuales podría ser completa, aunque nadie cree que así sea. Pero ésa es otra historia, bien contada por Lickorish y Millett: vea las "Otras lecturas". Aun así, ¿puede usted responder a la pregunta de Matt M. Maddox sobre el número de eslabonamiento cero?

Yo no pude. Al cabo de veinte minutos me enjugué la frente con un pañuelo y terminé el vino.

—¡Cuánta matemática con dos corchos! Me pregunto cuánta hallaría usted en una botella.

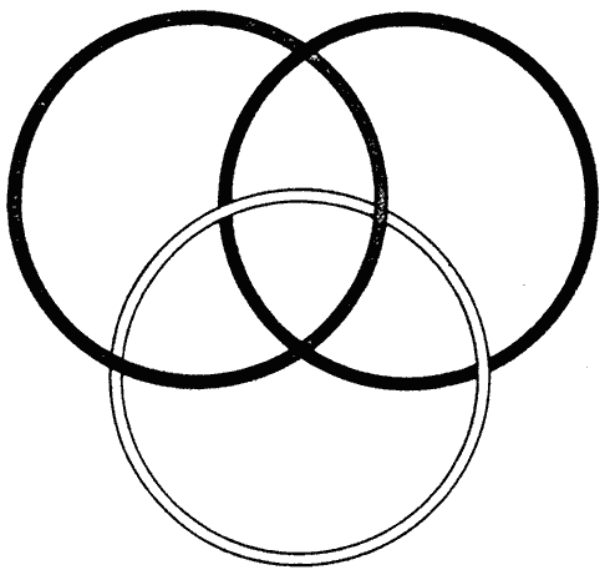
—Muchos han hallado poesía en una botella de vino —dijo Maddox—. Pero no mucha matemática... se necesita tener la cabeza despejada para ello. Recuerde: "Un pan, una copa de vino y tú..." Ornar Khayyam era bastante buen matemático. Encontró un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas. Lo cual me recuerda que hay un fabricante norteamericano de bebidas alcohólicas que usa unos eslabones especiales en la etiqueta (figura 7.11). Se los llama *anillos borromeos,* porque provienen del escudo de la familia Borromeo.

Miré la etiqueta.

—No me parece muy especial... Sólo tres círculos eslabonados.

—Hmm. Si usted tiene tres círculos eslabonados, ¿cuántos tiene que cortar para tener tres círculos separados?

—Dos.



7.11. Anillos borromeos. Un corte los separa todos.

—¿Por qué?

—Cada corte separa un círculo.

Cogió tres rizos de cordel, dispuestos como los anillos borromeos, y

un par de tijeras. Sacudió los anillos para demostrar que estaban unidos.

—Corte un rizo —dijo. Lo corté.

Los tres anillos cayeron separados sobre la mesa.

—Ah, usted hizo trampa. Si tiene tres círculos seguidos, usted puede cortar el del medio, y todos se separan.

Me entregó otro juego de anillos borromeos.

—Bien. Corte el que usted quiera.

—Bien, quiero el del extremo... curioso, no hay extremo...

—Es simétrico —señaló Maddox—. No importa cuál anillo corte, los tres se separan.

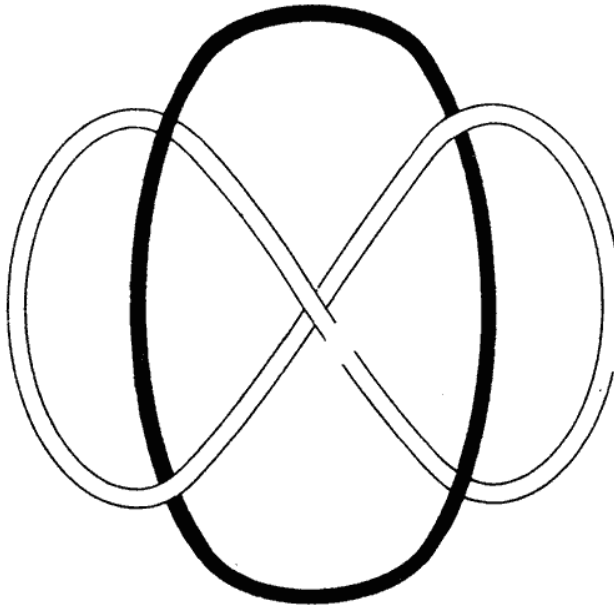
—Vaya —dije—. Bien, apuesto a que no puede hacer eso con cuatro anillos.

Me volvió a mirar con aire inescrutable.

—¿Quiere apostar 5 libras? —dijo.

Soluciones

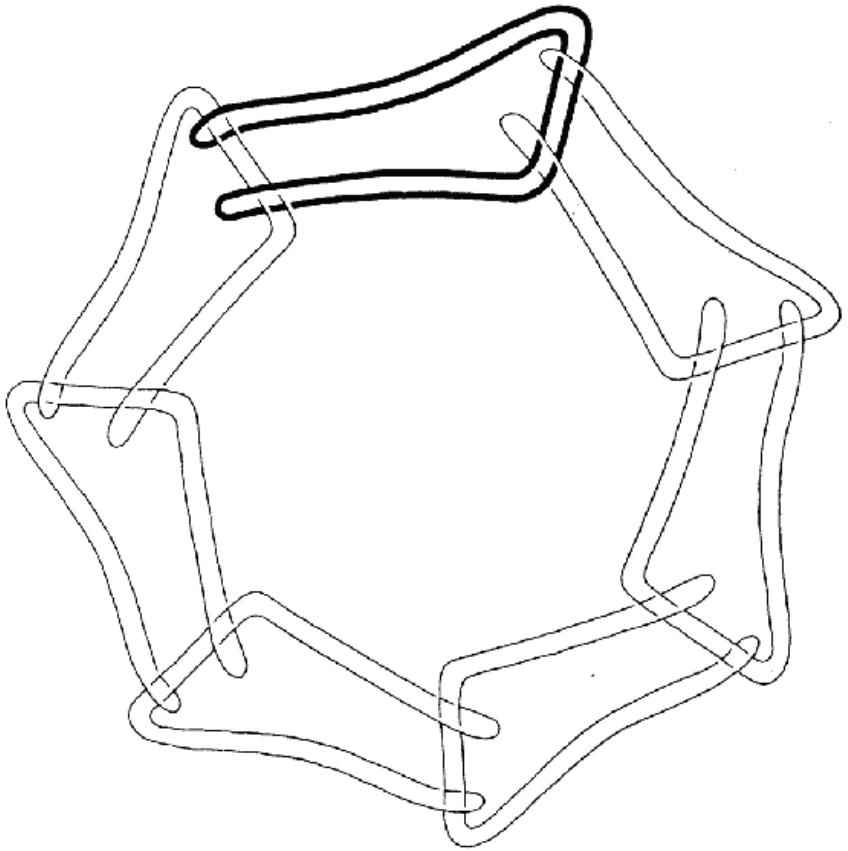
Los seis números de eslabonamiento para la figura 7.10 son $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=5$, $e=0$, $f=2$. Por lo tanto, los eslabones b y f son los únicos que se pueden convertir uno en otro, y eso se demuestra en un pequeño experimento.



7.12. El eslabón de Whitehead tiene un número de eslabonamiento cero pero no se puede separar.

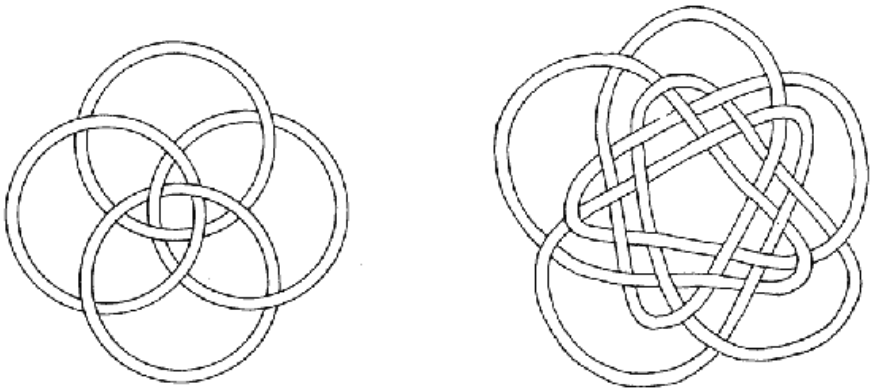
En la figura 7.12 se muestran dos círculos con número de

eslabonamiento cero que sin embargo están eslabonados. Esto se llama *eslabón de Whitehead.*



7.13. Anillos borromeos generalizados. Si se desplaza cualquier anillo (por ejemplo, el sombreado), los demás se separan.

No sólo usted puede hallar un eslabón de cuatro círculos que se separa del todo cuando se corta sólo uno: se puede hallar dicho eslabonamiento con n círculos para cualquier *n.* La figura 7.13 muestra cómo ocurre esto con siete círculos: el patrón general resulta obvio. C. van de Walle de Evreux me mostró soluciones elegantes para cuatro y cinco anillos, diferentes de las mías (figura 7.14).



7.14. Soluciones elegantes para cuatro y cinco anillos, cuyo autor es C. van de Walle.

Otras lecturas

J. H. Conway: “An Enumeration of Knots and Links, and Some of their Algebraic Properties”, *Computational Problems in Abstract Algebra,* J. Leech (comp.), Oxford, Pergamon Press, 1969, págs. 329-58.

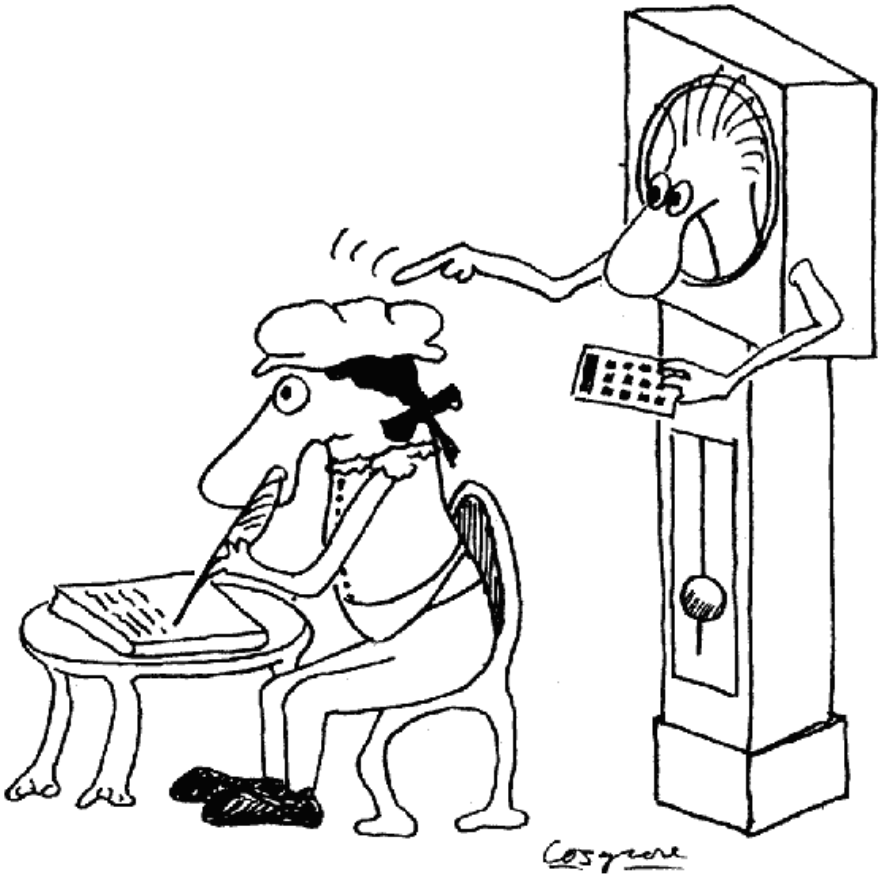
H. M. Cundy y A. P. Rollett: *Mathematical Models,* Oxford, Oxford University Press, 1961.

G. Kolata: “Solving Knotty Problems in Math and Biology”, *Science,* 231 (28 de marzo de 1986), págs. 1506-8.

W. B. R. Lickorish y K. C. Millett: “The New Polynomial Invariants of Knots and Links”, *Mathematics Magazine,* 61 (febrero 1988), págs. 3-23.

D. Rolfsen: *Knots and Links,* Berkeley, Publish or Perish, 1976.

8. Encuentros cercanos de la fase Fermat



He contado que en mi jardín, detrás del frambueso, hay una distorsión espaciotemporal. Conduce, entre otras cosas, al planeta Ombilicus, a mil millones de años luz de la Tierra en la dirección del ojo derecho de Orión. El lugar —y el tiempo— adonde uno vaya a parar si lo atraviesa parece depender de lo que pensamos al entrar. Hice algunos experimentos para ver si podía afinar la sintonía del dónde y el cuándo. Aún no domino bien la cosa —la semana pasada casi aparecí en la antigua Jericó justo cuando se derrumbaban los muros— peno lo estoy consiguiendo.

Ayer decidí visitar a un matemático a quien admiro mucho, Pierre de Fermat, quien nació en 1601 y murió en 1665. Vivió en Toulouse, y

fue abogado. Es más conocido, desde luego, por el teorema que no demostró (¿o sí?), a saber, el Último Teorema de Fermat.

Tal vez usted conozca la historia. Fermat tenía una copia de la *Arithmetica* de Diofante, un antiguo libro de álgebra. Las ecuaciones que se deben resolver con números enteros se llaman *ecuaciones diofantinas* en su honor. En una parte Diofante explica cómo hallar triángulos rectos cuyos lados sean todos enteros. Según el teorema de Pitágoras, dichos triángulos tienen lados (a, b, c) de tal modo que $a^2 + b^2 = c^2$. Hay infinitas soluciones enteras para esta ecuación, tales como (3, 4, 5) y (5, 12, 13). De todos modos, Fermat empezó a pensar en sumas de dos cuadrados perfectos que eran cuadrados perfectos, y se preguntó si lo mismo era posible para los cubos, la cuarta potencia, o lo que fuera. ¿Pueden dos cubos perfectos sumar otro cubo perfecto?

Decidió que era imposible, y así lo escribió en el margen de su libro. “Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o generalmente toda potencia, excepto un cuadrado en dos potencias con el mismo exponente. He descubierto una maravillosa demostración de ello, la cual no cabe en el margen.”.

Hasta hoy, nadie ha podido reconstruir la prueba faltante; tampoco se han hallado ejemplos que demuestren que el Último Teorema de Fermat es falso. El problema es célebre. Una vez se ofreció un gran premio por la respuesta, pero la inflación ha disminuido su valor y ahora ha sido reemplazado por algo financieramente más modesto. Se llama el “último teorema” porque es el último enigma no resuelto entre los que Fermat planteó a sus sucesores. Muchos lo han intentado, pero nadie lo ha conseguido.

A los matemáticos modernos les cuesta creer que Fermat supiera algo que ellos no saben —aunque a mí no me sorprendería en lo más mínimo— y suelen creer que la presunta demostración de Fermat debía de contener un error. Cientos, quizá miles de demostraciones plausibles pero falaces se han inventado desde entonces, y ciertamente es posible que Fermat cayera en una de estas trampas. Pero Fermat era un sujeto listo, y quizá tuviera razón.

O quizá no. ¿Cómo saberlo? Para la mayoría resulta imposible zanjar la cuestión, pues no existen pruebas en ninguno de ambos sentidos. Pero la mayoría de la gente no tiene una distorsión espaciotemporal detrás del frambueso. Mi plan consistía en regresar a la época de Fermat para preguntarle. Pensando que quizá sintiera curiosidad en cuanto al destino de su conjetura, reuní información actual sobre ella para llevarla conmigo.

Luego me concentré mentalmente en el Último Teorema de Fermat

y entré en la distorsión espaciotemporal.

Funcionó como un encantamiento. Aparecí en una sala confortable, llena de muebles antiguos, en cuyo hogar ardían leños. Un hombre con peluca estaba sentado ante un escritorio, pluma en mano, escribiendo en una libreta. Me aclaré la garganta para llamarle la atención y se volvió.

—¿De dónde vienes? —exclamó alarmado, levantándose de un brinco y blandiendo la pluma como si fuera un garrote—. ¿Eres un ladrón que viene a robar mis pertenencias?

—No, Monsieur de Fermat —contesté, manteniéndome cerca de la distorsión por si él estaba armado con una pistola o intentaba abatirme con la pluma—. Soy un admirador que viene del futuro lejano.

Fermat reflexionó. Me miró la ropa: texanos viejos y una camiseta roja con la leyenda del equipo de baloncesto de la Universidad de Houston, en la cual pasé un año.

—Quizá tengas razón —dijo—. Tu indumentaria es extravagante y no es de esta época, y tu lenguaje es horrendo. Pero claro, tú eres inglés, así que eso demuestra poco. Pero aun así tu acento es extraño. —Luego, con perspicacia de matemático, lanzó una pregunta penetrante—. ¿Puedes demostrar lo que dices?

Yo había previsto esto, y había llevado conmigo una calculadora programable. Tras diez minutos de mostrarle cómo generar números de Fibonacci o generar ecuaciones cúbicas hasta diez posiciones decimales, logré convencerlo.

—¿Por qué estás aquí, Viajero del Tiempo?

Expliqué que en el futuro lejano él era un matemático muy famoso. Esto lo sorprendió enormemente.

—¡Pero esto es un mero pasatiempo para mí, una pequeña veleidad para pasar las horas!

Le pedí silencio y le dije qué no fuera tan modesto.

—Pierre, he venido a preguntarte por tu Último Teorema —dije.

—¿Mi qué?

—No lo conocerás por ese nombre, desde luego. El teorema según el cual es imposible resolver un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o...

Se quedó desconcertado y se tiró de la peluca.

—Esa es una idea muy interesante. Nunca había pensado en ella: tiene cierto *je ne sais quoi*... Pero haré una cosa. La anotaré en mi ejemplar de la *Arithmetica* de Diofante.

Ese es el problema del viaje temporal. Nunca sabemos qué paradojas podemos causar. Aquí estaba yo, visitando a Fermat para

preguntarle sobre el teorema, y resultaba que él se enteraba del problema gracias a mí.

Miró el reloj de la pared y se levantó de un brinco.

—Perdóname, pero tengo una importante cita en el tribunal. Quizá quieras presentarme tus respetos de nuevo, en el futuro. ¿Dentro de una semana? —Y se marchó. Eché otra ojeada al estudio y retrocedí hacia la distorsión temiendo las consecuencias de lo que había hecho. ¿El universo existiría aún?

Por suerte aún existía. Me convencí de que al retroceder en el tiempo e inspirar la idea a Fermat tal vez había salvado al universo de una disolución paradójica. Bien, si Fermat no iba a pensar en ello, alguien tendría que hacerlo, de lo contrario la historia habría cambiado...

Lo bueno de las distorsiones espaciotemporales es que no se pierde tiempo esperando. Sintonizando mi reloj mental para una semana después del primer intento, me volví sobre los talones...

Fermat me estaba esperando.

—¡Buenos días, Viajero del Tiempo! ¡Por cierto has planteado un interesante enigma! Siete días y siete noches ha turbado mi mente. "La ecuación $xn + yn = zn$ es imposible en enteros, cuando n equivale a 3 o más". No hallo ejemplos de dónde tu conjetura...

—¡No, no, tu conjetura! ¡De lo contrario el universo se puede disolver!

—Muy bien, donde falla mi conjetura. He hallado varios ejemplos donde falla por muy poco. Así,

$$9^3 + 10^3 = 1729, 12^3 = 1728,$$

de modo que la ecuación

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1$$

tiene una solución, pues

$$x^3 + y^3 = z^3 - 1$$

Yo también he hallado soluciones.

¿Puede usted hallar una? ¿O cualquier otro de los "cuasiyerros de Fermat": soluciones a estas dos ecuaciones? ¿Y qué hay de $x^4 + y^4 = z^4 \pm 1$?

—Y he hallado un sinfín de relaciones curiosas entre las potencias —dijo (recuadro 8.1)—. Pero no encuentro un cubo que sea exactamente divisible por dos cubos. Puedo encontrar un cubo que se divida en dos cuadrados, y un cuadrado que se divida en dos cubos. —(¿*Puede hacerlo usted*?)—. He hallado una prueba de imposibilidad en

un caso, a saber el de las potencias de cuarto grado. —Vaya, qué rapidez, pensé—. Admito que la idea es divertida. Yo la llamo...

Recuadro 8.1

$133^4 + 134^4 = 158^4 + 59^4$
$1^4 + 8^4 + 12^4 + 32^4 + 64^4 = 65^4$
$4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = 15^4$
$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353$
$1^4 + 2^4 + 9^4 = 3^4 + 7^4 + 8^4$
$5^4 + 6^4 + 11^4 = 1^4 + 9^4 + 10^4$
$8^4 + 9^4 + 17^4 = 3^4 + 13^4 + 16^4$
$7^4 + 28^4 = 3^4 + 20^4 + 26^4$
$51^4 + 76^4 = 5^4 + 42^4 + 78^4$
$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$
$49^5 + 75^5 + 107^5 = 39^5 + 92^5 + 100^5$
$3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6$

—El método del descenso infinito, sí.

—¿La conoces?

—Te lo he dicho, eres famoso en el futuro. Y también lo es tu prueba de las cuartas potencias.

Meneó la cabeza maravillado.

—Pero soy apenas un aficionado.

—Blaise Pascal te llamó "el más grande matemático de toda Europa".

—Pascal es un adulador; siempre está buscando algo. —Suspiró—. El futuro... daría mucho por saber qué nuevas maravillas matemáticas se descubrirán... Y por tener una "calculadora programable" como la tuya.

—Pierre, me agradaría darte una, pero temo que cause una paradoja temporal, así que no me atrevo. Pero puedo ponerte al corriente de lo que ocurrió con tu Último Teorema.

Tabla 8.1. Hitos en el Último Teorema de Fermat

Fecha	*Descubridor*	*$x^n + y^n = z^n$ imposible...*
c. 1638	Fermat	
c. 1640	Fermat	
1738	Euler	*n* = 3 (independientemente)
1739	Euler	*n* = 4 (independientemente)
c. 1815	Sophie Germain	*x*, *y* y *z* primos, y *n* no divide *xyz*
1825	Lejeune Dirichlet	*n* = 5
1830	Legendre	*n* = 5 (independientemente)
1832	Lejeune Dirichlet	*n* = 14

1859	Ernst Eduard Kummer	n primo “regular”: en particular $n \leq 100$ excepto 37, 59, 67
1893	Dimitri Mirimanoff	$n = 37$
1905	Dimitri Mirimanoff	$n \leq 257$
1909	Arthur Wieferich	n es un número primo impar que no divide yxz, y n^2 no divide $2^{n-1}-1$ (la segunda condición vale para todas las $n < 3 \times 10^9$ excepto 1093 y 3511)
1922	Louis Mordell	una cantidad finita de excepciones para cualquier $n \leq 3$ siempre que la “conjetura de Mordell” sea cierta
1978	S. S. Wagstaff	$n \leq 125.000$
1983	Gerd Faltings	una cantidad finita de excepciones para cualquier $n \geq 3$
1987	D. R. Heath-Brown	para “casi todas” las n

Y le conté que varios de sus sucesores habían probado casos específicos (Tabla 8.1) y que se sabía que su conjetura tenía validez para todas las potencias hasta la 125.000ª incluida. Abrió su ejemplar de Diofante, cogió la pluma y se puso a escribir deprisa en lo que era un margen enorme, anotando todo lo que yo decía en una suerte de taquigrafía legal. Me puso nervioso, porque la historia no registra tales anotaciones, pero me pareció descortés callarme.

—El nuevo resultado más contundente de mi época —le dije— es la prueba de la conjetura de Mordell en 1983, efectuada por un joven alemán llamado Gerd Faltings. Mordell conjeturó que para toda una clase de ecuaciones diofantinas, incluidas las tuyas, el número de soluciones es finito. Faltings halló una prueba extremadamente avanzada y dificultosa. Así que para todos los $n \geq 3$, si hay alguna excepción a tu Último Teorema, hay a lo sumo un número finito de ellas.

No todos entienden que, aunque no sepamos exactamente las excepciones, es un gran paso adelante saber que su número es finito. Es importante saberlo, porque entonces uno puede aspirar a fijar límites a sus tamaños, después de lo cual una verificación por ensayo y error debería, en principio, poner fin al problema. En la práctica los límites son demasiado amplios para que esto dé resultado, pero con cierta astucia se puede aspirar a llegar a alguna parte. De hecho, usando el resultado de Faltings, D. R. Heath-Brown demostró en 1987 que el Último Teorema de Fermat es verdadero para “casi todos” los exponentes *n*. Es decir, como *n* tiende a la infinitud, la proporción de valores para los cuales el Último Teorema es válido tiende al 100 por ciento. Es un resultado contundente: en vez de decir que para cada *n* puede haber una cantidad finita de soluciones, dice que *no* hay soluciones excepto para un muy raro conjunto de exponentes *n*. Mientras yo explicaba esto, Fermat volvió a hacer anotaciones en los anchos márgenes de su *Arithmetica*, y yo me estremecí.

—Yo también obtuve algunos resultados en cuanto a la finitud de las soluciones —dijo modestamente—. Mi favorito es que el único cubo que puede exceder a un cuadrado por 2 es $3^3 = 5^2 + 2$.

—En tal caso, te gustará el teorema de W. Ljunggren, según el cual $1 = 1^2$ y $57121 = 239^2$ son los únicos cuadrados que, una vez incrementados por uno y divididos por la mitad, arrojan cuartas potencias. Se quedó fascinado, pero de pronto su expresión cambió.

—Pero debe de haber un error en tu descripción de este trabajo de Monsieur Faltings. Si $x^n + y^n = z^n$, entonces para cualquier constante k obtenemos $(kx)^n + (ky)^n = (kz)^n$. Así una solución genera una infinitud.

—Es verdad —dije—. Quise decir infinitas soluciones sin un factor común.

—Ah.

—Pero en verdad ése no es el modo de enfocarlo. Mordell y Faltings pensaron en señalar que la ecuación $x^n + y^n - z^n$ es equivalente a

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1.$$

Poniendo

$$\frac{x}{z} = X \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} = Y$$

ves que resolver $x^n + y^n = z^n$ en enteros equivale a resolver $X^n + Y^n = 1$ en números racionales.

—Sí, lo sé. Buena parte de mi trabajo versa sobre soluciones de ecuaciones en números racionales.

—Multiplicar x, y y z por una constante k no cambia X o Y. Así, la cantidad de soluciones racionales para $X^n + Y^n = 1$ es finita, sin ninguna triquiñuela. Desde ese punto de vista —continué— tu Último Teorema es bastante curioso. La ecuación $X^n + Y^n = 1$ define una curva en el plano de la coordenada (X,Y) que hoy llamamos curva Fermat de grado n. —Cuando n es par, las curvas de Fermat son como óvalos cuadrangulares; cuando n es impar se extienden hasta la infinitud (figura 8.1)—. El Último Teorema postula que aunque los puntos (X,Y) con ambas coordenadas racionales, estén apiñados intensamente en el plano, la curva de Fermat serpea entre tales *puntos racionales,* sin tocar jamás ninguno de ellos.

—Pero eso no prueba demasiado —dijo él—. Pues en verdad hay muchas curvas así. Así la recta $Y = X + \sqrt{2}$ no puede cruzarse con ningún punto racional. Si fuera así, $\sqrt{2} = Y - X$ sería racional.

—Sí, pero los coeficientes de la ecuación de Fermat son en sí

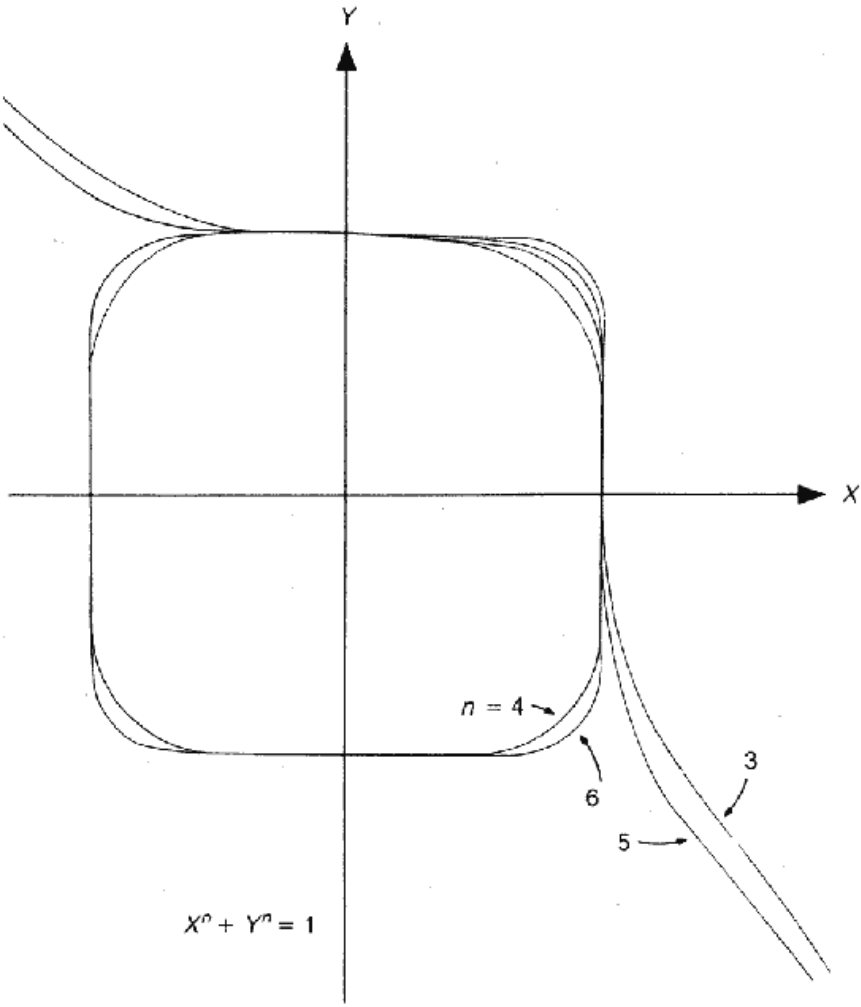
mismos racionales, mientras que $\sqrt{2}$ no lo es.

—Pero un simple truco convierte la línea $Y - X = \sqrt{2}$ en $(Y - X)^2 = 2$, es decir, $X^2 + Y^2 - 2XY = 2$, y ahora no hay números irracionales en la ecuación. (Figura 8.2)

—Es verdad —dije—. Eso demuestra cuán cuidadoso hay que ser con estas cosas. En cualquier caso, el resultado de Faltings es que cada curva de Fermat sólo puede tocar un número finito de puntos racionales.

Fermat hojeó su libro.

—Tu pregunta también me ha incitado a reflexionar sobre otros asuntos —dijo—. Por ejemplo, si no es posible que dos cubos sumen un cubo, ¿será posible con tres? Y desde luego lo es; $3^3 + 4^3 + 5^3 =$ ó^3. Y eso me induce a conjeturar que para todos los n es posible para n potencias enésimas sumar una potencia enésima, pero no para n–1.



8.1. Curvas Fermat de varios grados. Si el Último Teorema es cierto, ninguna curva de Fermat contiene ningún punto donde ambas coordenadas sean números racionales.

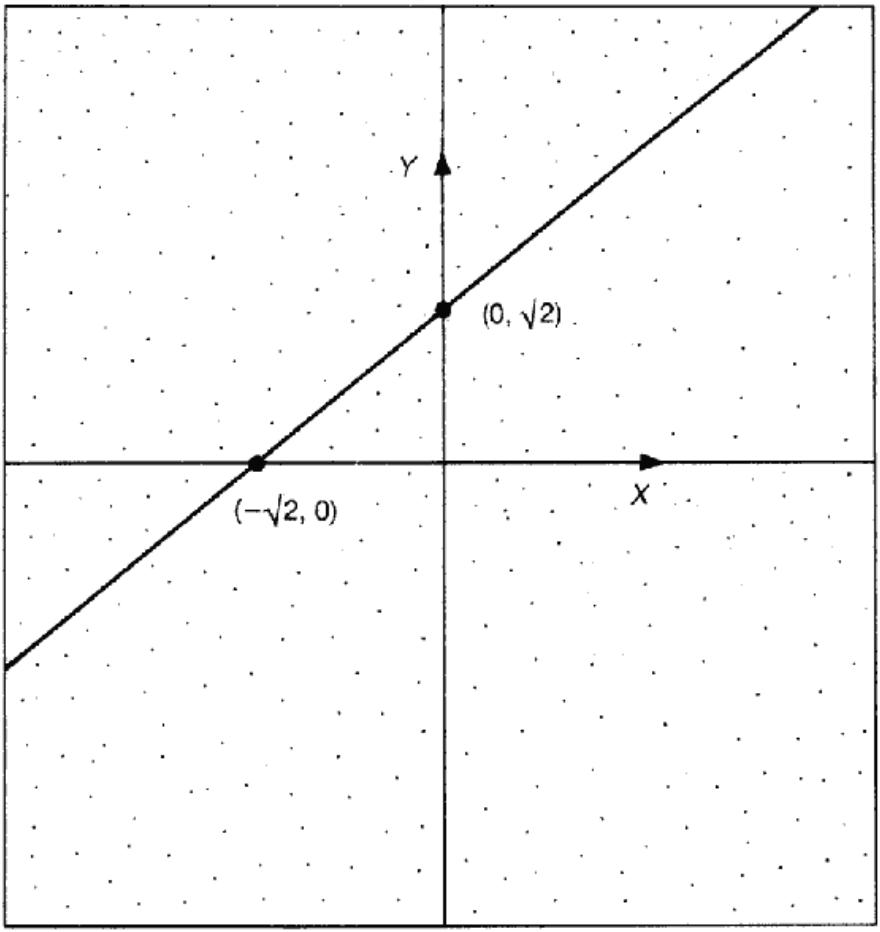
Garrapateó con entusiasmo en los márgenes, para mi creciente horror.

—¡Pero esa es la conjetura de Euler! —exclamé—. ¡Llegó años después de ti! Por favor, que eso no se publique. ¡Las paradojas serían terribles!

—A menos —musitó Fermat— que las versiones impresas no llegaran a sobrevivir hasta tu época. Entonces vosotros no sabríais que me había anticipado a *Monsieur* Euler.

—Tal vez —dije sin convicción. ¿Y qué había de las anotaciones marginales? ¿Y por qué él se había quejado de los márgenes del libro, que en realidad eran tan anchos? Intenté distraerlo—. En mi época se ha demostrado que la conjetura de Euler es falsa.

—Vaya, ésa es una noticia interesante.



8.2. Curvas que pasan por donde no puede haber puntos racionales. La curva $Y^2 - 2XY + X^2 - 2 = 0$, que es la línea $Y = X + \sqrt{2}$, es un ejemplo. Los puntos racionales,

ilustrados esquemáticamente con un punteado, son densos en el plano.

Le expliqué que en 1966 L. J. Lander y T. R. Parkin habían hallado el primero ejemplo (único hasta 1988) contrario a la conjetura de Euler: cuatro quintas potencias cuya suma daba una quinta potencia (recuadro 8.2).

Recuadro 8.2

$$27^5 = 14348907$$
$$84^5 = 4182119424$$
$$110^5 = 16105100000$$
$$133^5 = 41615795893$$
$$144^5 = 61917364224$$

—¿Cómo lo descubrieron? —preguntó mientras copiaba los números en el margen. Yo estaba alarmado. Fermat había llenado casi todos los márgenes del libro.

—Mediante una investigación con ordenador.

—¿Ordenador?

—Una calculadora programable gigantesca.

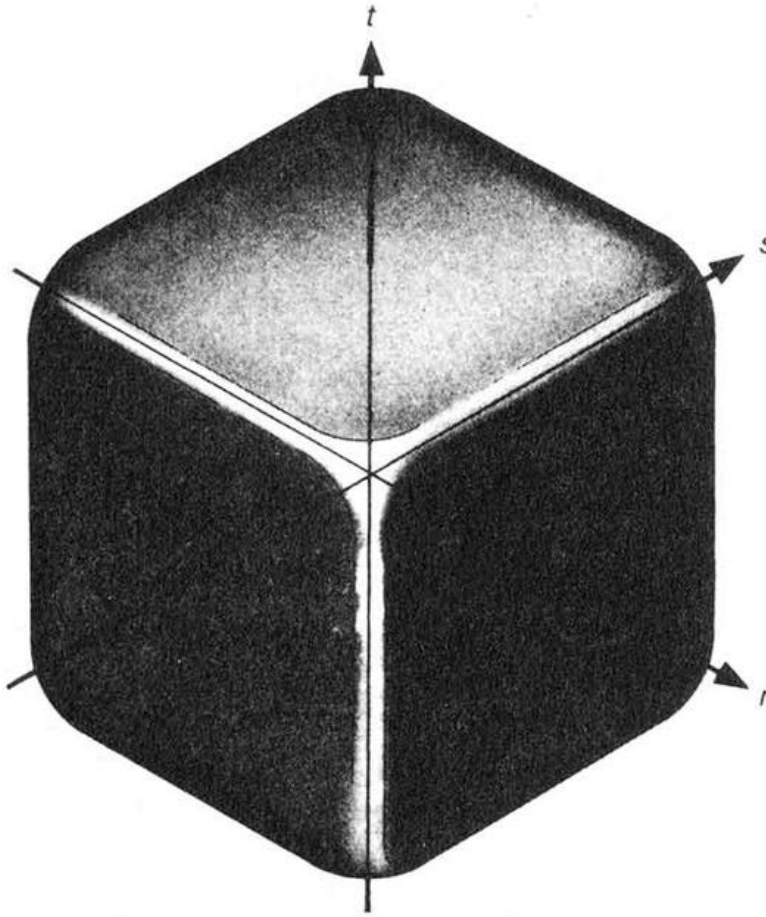
—Oh. Esperaba que hubiera conceptos matemáticos interesantes.

Recuadro 8.3

$$2682440^4 = 51774995082902409832960000$$
$$15365639^4 = 55744561387133523724209779041$$
$$18796760^4 = 124833740909952854954805760000$$
$$20615673^4 = 180630077292169281088848499041$$

—¡Los hay! En 1988 Noam Elkies de la Universidad de Harvard encontró otro ejemplo contrario: tres cuartas potencias cuya suma es una cuarta potencia (recuadro 8.3). Y allí había matemática genuina, no una mera investigación por ordenador.—Cuéntame más.

—Bien, Elkies empezó tal como Faltings: en vez de buscar soluciones enteras a la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ dividió por w^4 y examinó la superficie $r^4 + s^4 + t^4 = 1$ en coordenadas (r,s,t). Es como una cruza entre una elipsoide y un cubo (figura 8.3). Una solución entera para $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ conduce a una solución racional $r = r/w$, $s = y/w$, $t = z/w$ de $r^4 + s^4 + t^4 = 1$. Inversamente, dada una solución racional de $r^4 + s^4 + t^4 = 1$, puedes asumir que r,s,t tienen todos el mismo denominador w poniéndolos sobre un común denominador, y eso conduce directamente a una solución para $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$.



8.3. Superficie de Elkies $r^4 + s^4 + t^4 = 1$. Al contrario de la curva de Fermat $X^4 + Y^4 = 1$, los puntos de las tres coordenadas racionales (r,s,t) son densas en esta superficie.

—Sí, sí, eso está claro —Bien, sin duda lo está para personas como Fermat.

Recuadro 8.4

Demjanenko demostró que $r^4 + s^4 + f^2 = 1$ siempre y cuando existan *x, y* y *u* de tal modo que

$r = x + y$

$s = x - y$

$(u^2 + 2)\, y^2 = -(3u^2 - 8u + 6)\, x^2 - 2(u^2 - 2)\, x - 2u$

$(u^2 + 2)\, t = 4\,(u^2 - 2)\, x^2 + 8ux + (2 - u^2)$

—Un matemático ruso, V. A. Demjanenko, halló una condición bastante complicada para que un punto *(r,s,t)* se encuentre en la

superficie relacionada $r^4 + s^4 + t^4 = 1$ (recuadro 8.4). Para resolver el problema basta con demostrar que t puede ser elevado al cuadrado. Una serie de simplificaciones demuestra que esto se puede efectuar siempre que la ecuación

$$Y^2 = -31790X^4 + 36941X^3 - 56158X^2 + 28849X + 22030$$

tenga una solución racional. Hay una extensa teoría de tales ecuaciones, conocidas como curvas elípticas. En particular hay condiciones en las cuales no puede existir solución. Estas condiciones no se cumplían en este caso, lo cual demostraba que dicha solución podía existir. En esta etapa Elkies intentó una investigación por ordenador, y halló la solución

$$(X, Y) = \left(-\frac{31}{467}, \frac{30731278}{467^2}\right).$$

De ello dedujo la solución racional

$$(r, s, t) = \left(-\frac{18796760}{20615673}, \frac{2682440}{20615673}, \frac{15365639}{20615673}\right)$$

Esto condujo directamente al ejemplo contrario a la conjetura de Euler para las cuartas potencias, a saber $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$.

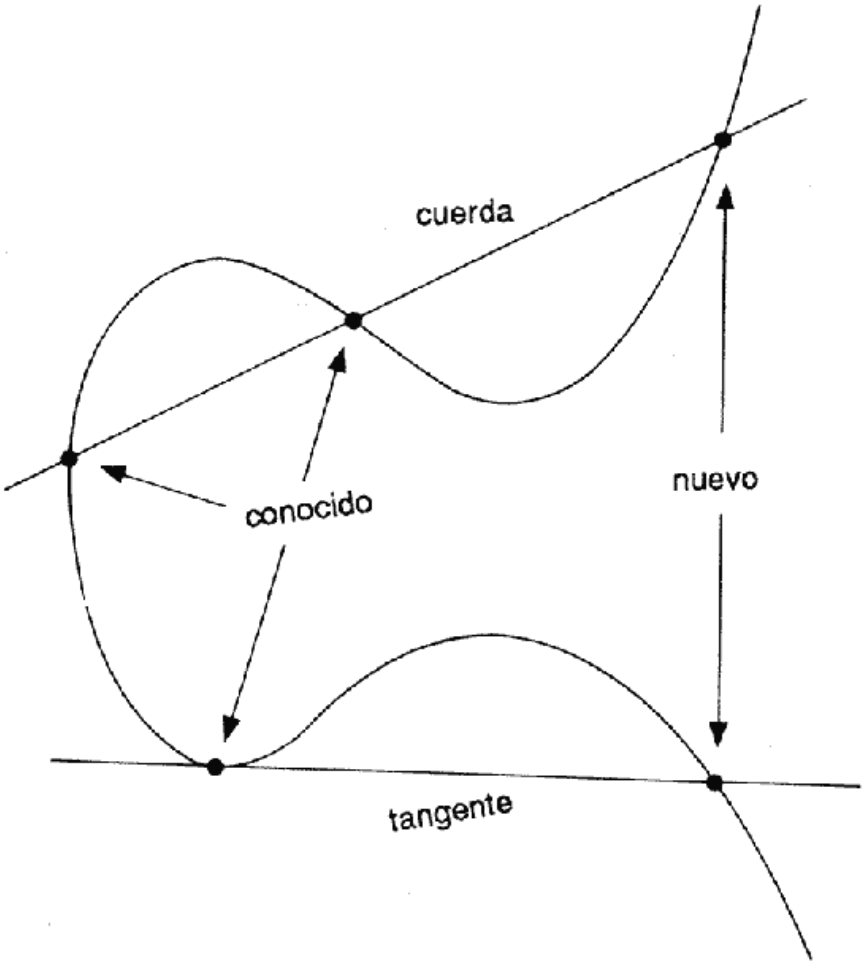
—¿Conque aun aquí fue preciso usar uno de esos "ordenadores"? —preguntó Fermat con cierto abatimiento, mientras su pluma volaba ominosamente por el margen—. ¿Los matemáticos de tu época ya no usan la cabeza?

—Casi todo el tiempo. Aun aquí Elkies usó primero la cabeza, y luego usó el ordenador de un modo más inteligente que en una mera búsqueda por ensayo y error. Los ordenadores son herramientas para ayudar a los matemáticos, no para reemplazarlos.

—Entiendo. ¿Hay otras soluciones?

—Sí. En este caso son infinitas. La teoría de las curvas elípticas brinda un procedimiento general para construir nuevos puntos racionales a partir de los viejos, usando la geometría de la curva. (Figura 8.4)

—Es un antiguo truco. He visto algo semejante en el trabajo de Monsieur Bachet.



8.4. Si se traza una línea recta entre dos puntos racionales de una curva elíptica, se cruza con la curva en un tercer punto que también debe ser racional. Si se traza una tangente a una curva elíptica en un punto racional, se vuelve a cruzar con la curva en un punto racional. Este proceso de cuerda y tangente produce nuevas soluciones racionales a partir de las viejas, una aplicación de la geometría a la teoría de los números.

—Tiene muchos años, aunque dudo que reconocieras su forma más general, la teoría de las variedades abelianas. Pero estoy divagando. Aplicando una variante de esta construcción, Elkies demostró que existen infinitas soluciones. De hecho demostró que hay muchos puntos racionales en la superficie $r^4 + s^4 + t^4 = 1$, tantas que son *densas*. Es decir, cualquier fragmento de la superficie, por ínfimo que sea, debe contener un punto racional. Pero los números se vuelven muy grandes. La segunda solución generada por esta construcción geométrica es... (Escribí lo que figura en el recuadro 8.5.)

Recuadro 8.5

Segunda solución de Elkies. Si

$x = 1439965710648954492268506771833175226785020412661530044221829233633 6633$

$y = 4417264698994538496943597489754952845854672497179047898864124209346920$

$w = 9161781830035436847832452398267266038227002962257243662070370888722169$

luego

$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$

—Son números enormes. Y noto con cierta satisfacción que se hallan a partir de la primera solución por pensamiento puro, sin intervención del ordenador. —Empezó a copiar los cuatro vastos números, pero se detuvo. Se había quedado sin espacio.

—La historia tiene un vuelco curioso —dije, tratando de distraerlo. ¡Tenía que manotear ese libro! Pero si lo robaba, la posteridad nunca sabría que Fermat había tenido un ejemplar de la *Arithmetica*... La anulación de una paradoja originaría otra... Era mejor seguir hablando —. Cuando Elides descubrió que existía una solución, Roger Frye de Thinking Machines Corporations efectuó una investigación exhaustiva. En máquinas de conexión les llevó 100 horas...

—¿Thinking Machines? ¿“Máquinas pensantes”? ¿Y máquinas de conexión? ¿El mundo del futuro es sólo máquinas?

—En gran medida. Vivimos en ellas, comemos a través de ellas, nos desplazamos en ellas, volamos en ellas...

—¿Volar? Estás bromeando.

Recuadro 8.6

$95800^4 = 84229075969600000000$ +

$217519^4 = 2238663363846304960321$ +

$414560^4 = 29535857400192040960000$ =

$422481^4 = 31858749840007945920321$

—Y las usamos para hablar al otro lado de la Tierra. Una máquina de conexión es un súper ordenador, capaz de efectuar millones de cálculos por segundo. Usando una ametralladora para fulminar un mosquito, por así decirlo, Frye descubrió una solución más pequeña: en verdad la solución más pequeña posible. (Recuadro 8.6.) Así que el ordenador venció al fin.

—Notable. Millones... Pero esta historia me pone a pensar de nuevo. Yo podría refinar la conjetura de Euler. Así, para cada *n*, sea s(*n*) el número más pequeño de tal modo que existan potencias enésimas de s(*n*) cuya suma sea una potencia enésima. Así s(2) = 2

porque dos cuadrados pueden sumar un cuadrado. Y s(3) = 3 porque tres cubos pueden sumar un cubo, aunque dos no pueden. La conjetura de Monsieur Euler es que s(n) = *n,* pero tú dices que esto es falso. De hecho, s(4) = 3 a porque el ejemplo de Monsieur Euler demuestra que s(4) < 3 y mi teorema para las cuartas potencias demuestra que s(4) no es 2.

—Y el resultado de Lander y Parkin da s(5) = 4 —dije.

—¡Objeción! —exclamó, en un típico arrebato de abogado profesional—. Demuestra sólo que s(5) es 4 o menos. —Fermat sabía reconocer una falla cuando la veía, fuera legal o matemática—. Por lo que me has dicho, sabemos que s(5) es 3 o más... ¿Pueden tres quintas potencias sumar una quinta potencia?

—Ni idea. Parece improbable.

—Quizá. Pero en todo caso es un problema interesante: calcular s(*n*) para cada *n.* Hay algunos resultados fáciles, desde luego: por ejemplo s(6) es a lo sumo 64, y en general s(n) es a lo sumo 2*n*.

—Porque $2^6 = 1^6 + ... 1^6$ con sesenta y cuatro unos, y en general $2^n = 1^n + ... 1^n$ con 2^n unos.

—Exacto. No puedo creer que estas estimaciones tan toscas sean las mejores, aunque tienen la virtud de demostrar que s(*n*) es finito para cada *n.*

(*¿Puede usted perfeccionar estas estimaciones?* Por ejemplo, si puede hallar diez séptimas potencias cuya suma sea una séptima potencia, usted habrá demostrado que s[7] ≤ 10. Eso sería mucho mejor que la estimación de 128 efectuada por Fermat. Tal vez le agrade experimentar.)

Tan entusiasmado estaba Fermat con todo esto que empezó a sacar libros del anaquel, buscando más márgenes para anotar. Brinqué hacia adelante, manoteé el ejemplar de Diofante, y arranqué grandes franjas de los márgenes para obliterar todo lo que había escrito, arrojando el papel al fuego. ¡Tenía que evitar una paradoja a toda costa!

Me costó un poco calmar a Fermat, pero eventualmente comprendió por qué había actuado de modo tan brusco. Se quedó mirando las llamas con expresión inescrutable.

Luego su rostro... cambió.

Fue como el sol surgiendo en medio de una tormenta.

—¡Una demostración! —exclamó—. ¡Tengo una demostración del Último Teorema! Es ingeniosa pero elegante... ¡Déjame anotarla en el margen! ¡Maldito seas, Viajero del Tiempo! Has cortado los márgenes y ya no hay lugar para escribir la demostración. ¿Dónde puse ese fajo de documentos legales?

Salí de puntillas de la sala, regresando a la distorsión temporal.

Las paradojas temporales son curiosas.

Soluciones

Los "cuasiaciertos" de Fermat

$6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$ es un ejemplo de $x^3 + y^3 = z^3 - 1$. T. Wightman de Borehanwood, Inglaterra, me envió otros dos ejemplos en mayo de 1988:

$$720^3 + 242^3 = 729^3 - 1$$
$$729^3 + 244^3 = 738^3 + 1$$

lo cual sugiere patrones interesantes. En particular $729 = 3^6$, así que éstos resuelven las notables ecuaciones

$$x^3 + y^3 = z^{18} - 1$$
$$z^{18} + y^3 = z^3 + 1$$

De hecho hay infinitas soluciones para las ecuaciones $x^3 + y^3 = z^3 \pm 1$. Para hallarlas, tenga en cuenta la ecuación más general $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$. Se sabe que la solución general racional para esto es dada por

$$x = k\,[1 - (a - 3b)\,(a^2 + 3b^2)]$$
$$y = k\,[(a + 3b)\,(a^2 + 3b^2) - 1]$$
$$z = k\,[(a + 3b) - (a^2 + 3b^2)^2]$$
$$w = k\,[(a^2 + 3b^2)^2 - (a - 3b)],$$

donde a, b y k son racionales. Escójalos de tal modo que una de las variables sea ± 1 y los cuatro sean enteros. (Por ejemplo, sea $k = 1$, $a = 3b$ para obtener $x = 1$.)

$x^4 + y^4 = z^4 \pm 1$

No conozco ninguna solución para esto, pero tampoco sé de la existencia de la demostración de alguna solución. Tal vez alguien ya conozca la respuesta. Por ensayo y error he hallado algunas coincidencias aproximadas como

$$7^4 + 8^4 = 9^4 - 64$$
$$21^4 + 36^4 = 37^4 - 1$$
$$11^4 + 15^4 = 16^4 - 270$$
$$37^4 + 37^4 = 44^4 + 226$$
$$53^4 + 62^4 = 69^4 - 304$$

$$167^4 + 192^4 = 215^4 + 192$$

$x^3 + y^3 = z^2$

Una solución es $l^3 + 2^3 = 3^2$. Para hallar infinitamente muchas, proceda de este modo. Tome dos enteros cualesquiera, por ejemplo 2 y 3. Elabore $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$. Multiplique la ecuación original por para obtener

$$(2\times 35)^3 + (3\times 35)^3 = 35\times 35^3 = 35^4 = (35^2)^2.$$

Es decir,

$$70^3 + 105^3 = 1225^2.$$

Un método similar funciona para dos números iniciales cualesquiera.

$x^2 + y^2 = z^3$

Pruebe la misma idea. Escoja dos números cualesquiera, digamos 1 y 2. Luego $1^2 + 2^2 = 5$. Multiplique todo por 5^2 para obtener $5^2 + 10^2 = 5^3$. De nuevo el procedimiento funciona para dos números iniciales cualesquiera.

$x^5 + y^5 + z^5 = w^5$

¡No tengo idea de si esto es posible o no!

Estimaciones para s(n).

Esto se relaciona con una cuestión llamada *problema de Waring*. En 1770 Edward Waring declaró que todo número entero es una suma de a lo sumo nueve cubos, diecinueve cuartas potencias y demás. Siguiendo esta idea, los teóricos de los números definieron una función g(n) como el número más pequeño, de tal modo que cada número k se pueda escribir como una suma de g(n) enésimas potencias. Así que la conjetura de Waring es que $g(3) = 9$, $g(4) = 19$, y, por implicación, que g(n) es finito para todas las n. Esta conjetura fue luego demostrada por David Hilbert.

Los números "pequeños" k tienden a requerir números inusitadamente grandes de enésimas potencias, por mera coincidencia. Por lo tanto, una función más sensata es G(n), el número más pequeño tal que una finita cantidad de números k se puedan escribir como una

suma de G(n) enésimas potencias. Se ha trabajado mucho para hallar G(n). Por ejemplo, en 1958 J. R. Chen demostró que G(n) $\leq n(3 \log n + 5{,}2)$. En 1984 R. Balasubramanian y C. J. Mozzochi mejoraron esto para obtener

$$G(n) \leq \frac{\log(108) + 3\log(n)}{\log\left(\frac{n}{(n-1)}\right)} - 4$$

y otros matemáticos, sobre todo R. C. Vaughan en 1986, han mejorado esto por varias pequeñas *n.* Los límites más conocidos para *G(n)* son

n	1[illegible]
G(n) $\leq$	1[illegible]

Obviamente nuestra función s(n) es menor o igual que G(n): consideremos que k es una potencia enésima muy grande. Así la tabla para G(n) también da límites sobre cuán grande puede ser s(n). Sin embargo, es probable que s(n) sea más pequeño que G(n) para todos los $n \geq 6$.

Sabemos que esto ocurre para $n = 4$ y 5, porque s(4) = 3 y s(5) < 4. También ocurre lo mismo con $n = 6$ y 7, tal como lo demuestran los ejemplos de *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers,* de David Wells. Como él señala, una sexta potencia puede ser la suma de siete sextas potencias. El ejemplo más pequeño es

$$1141^6 = 74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 894^6 + 1077^6.$$

Por lo tanto s(6) $\leq$ 7. Para las séptimas potencias, tenemos

$$102^7 = 12^7 + 35^7 + 53^7 + 58^7 + 64^7 + 83^7 + 85^7 + 90^7,$$

demostrando que s(7) < 8. Esta es la séptima potencia más pequeña que es una suma de ocho séptimas potencias.

X. Gonze de Louvain, Bélgica, me envió los siguientes descubrimientos:

$$12^8 = 2\times11^8 + 3\times5^8 + 4^8 + 4\times3^8 + 2^8 + 23\times1^8$$
$$5^9 = 7\times4^9 + 6\times3^9 + 19\times1^9$$
$$7^{11} = 5\times6^{11} + 3\times5^{11} + 4\times4^{11} + 39\times2^{11}$$

lo cual demuestra que s(8) < 34, s(9) < 32, y s(lll) < 51.

Para resumir, los mejores límites conocidos para s(n) son

n	1[illegible]
s(n)	1[illegible]

Los límites de $n = 10$ y $n \geq$ provienen de G(n), pero el patrón de los números sugiere que estos límites son demasiado grandes.

Otros dos resultados notables del libro de Wells son los siguientes. La cuarta potencia más pequeña que es la suma de cinco cuartas potencias es

$$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$$

La quinta potencia más pequeña que es la suma de cinco quinta potencias distintas es

$$72^5 = 19^5 + 43^5 + 46^5 + 47^5 + 67^5$$

X. Gonze también descubrió que

$$125^6 = 118^6 + 93^6 + 2\times78^6 + 48^6 + 42^6 + 18^6 + 2\times6^6$$

Estos ejemplos no mejoran los límites de s(4), s(5) y s(6), pero son notables por los pequeños números involucrados.

Otras lecturas

V. A. Demjanenko: “L. Euler’s Conjecture”, *Acta arithmetica,* 25 (1973-74), págs. 127-35.

Noam Elkies: “On $= A^6 + B^6 + C^6 = D^6$ “, *Mathematics of Computation,* 51 (1988), págs. 825-35.

L. J. Lander y T. R. Parkin: “Counterexamples to Euler’s Conjecture on Sums of Like Powers”, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 72 (1966), págs. 1079.

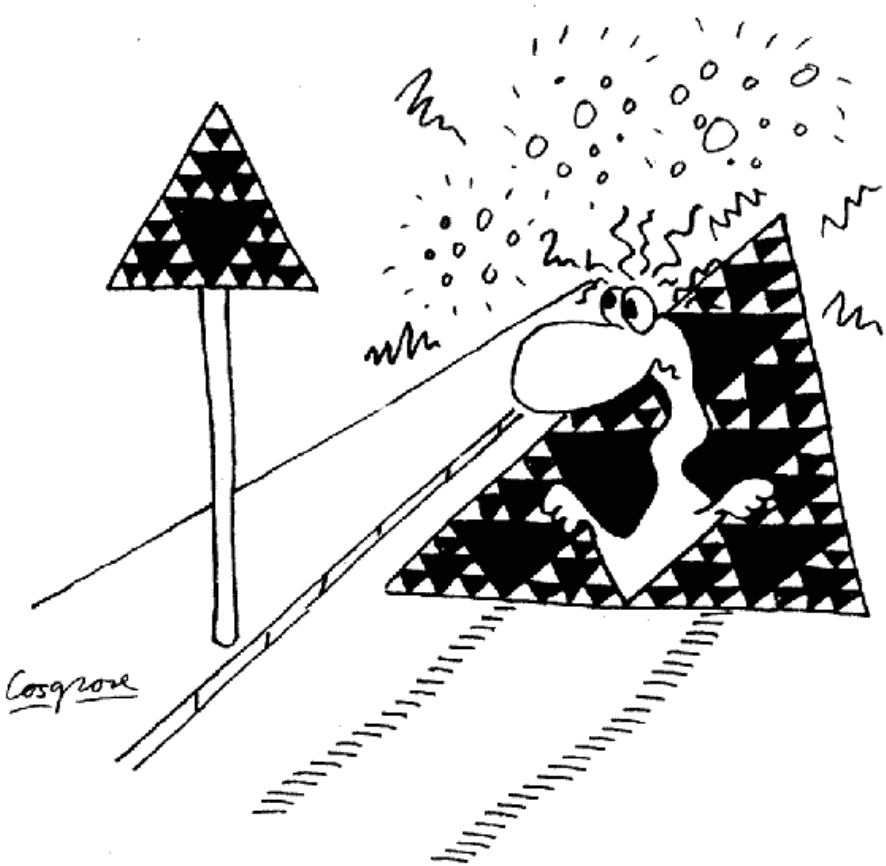
L. J. Mordell: *Diophantine Equations,* Nueva York, Academic Press, 1969.

Paulo Ribenboim: *13 Lectures on Fermat’s Last Theorem,* Nueva York, Springer-Verlag,1979.

Ian Stewart: *The Problems of Mathematics,* Oxford, Oxford University Press, 1987.

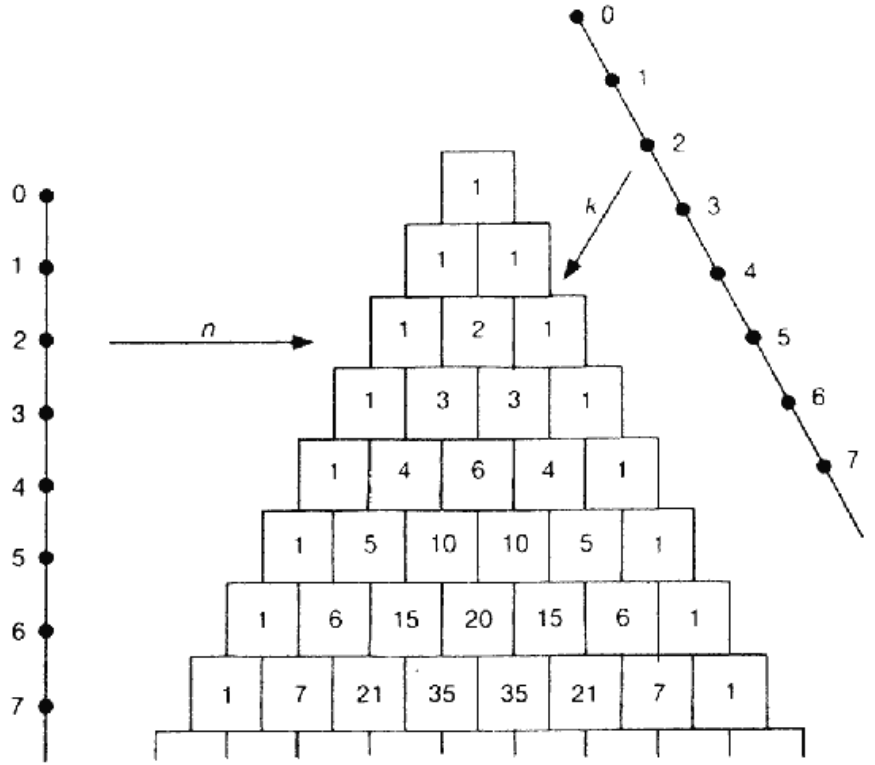
David Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers,* Harmondsworth, Penguin, 1986.

9. El fractal de Pascal



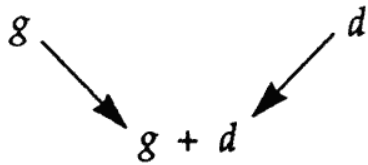
Esta es una historia de la vida real. No se han cambiado los nombres para proteger a los inocentes, pues —como Kurt Vonnegut señaló en *Las sirenas de Titán*— la protección de los inocentes es una cuestión de rutina celestial.

La inspiración surge a menudo de fuentes inesperadas. Hace un tiempo estaba leyendo *Algorithmic Information Theory* de Gregory Chaitin, un libro notable y estimulante acerca de las propiedades aleatorias de la estructura lógica de la aritmética. No hablaré de eso aquí; en realidad, deseo hablar de las *regularidades* de la estructura de la aritmética. De cualquier modo, el libro de Chaitin incluye un diagrama, el cual reconocí, y un teorema, el cual *no* reconocí.



9.1. El triángulo de Pascal: cada número es la suma de los dos que tiene encima.

El diagrama y el teorema son acerca del triángulo de Pascal. Se trata de una disposición triangular de números (figura 9.1) cuyos lados izquierdo y derecho son todos números 1, y donde cada número es la suma de los dos inmediatamente superiores. Simbólicamente,



El número $k°$ de la enésima fila (considerando que tanto n como k empiezan en cero) es el *coeficiente binomio* $C(n,k)$. Estos números aparecen como coeficientes de x^k en la expansión de $(1+x)^n$, de allí el nombre. Por ejemplo,

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 = 4x^3 = x^4,$$

correspondiente a la fila 4 del triángulo de Pascal. Los coeficientes binomios son importantes para todas las matemáticas.

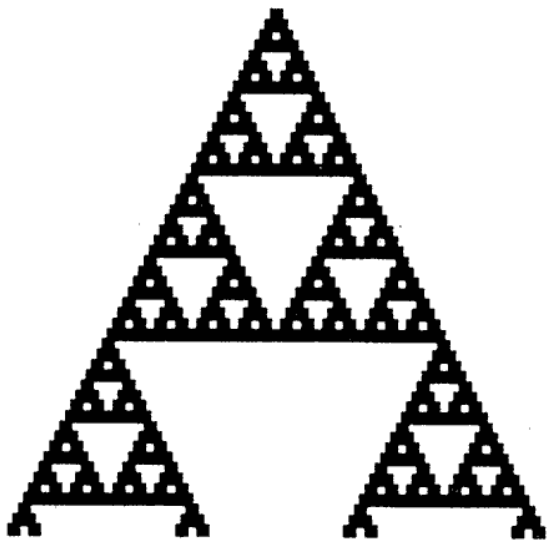
A veces los coeficientes binomios son pares, y a veces son impares.

¿Cómo se los puede diferenciar? De eso tratan el diagrama y el teorema del libro de Chaitin.

Dibujemos el triángulo de Pascal como una cuadrícula, como ladrillos en una pared triangular. Pintemos un cuadrado de negro si el número correspondiente es impar, y de blanco si es par. Para generar esa figura, no es preciso deducir los números exactos del triángulo de Pascal. Sólo se necesita la regla simbólica mencionada, con la información de que

$$\text{1 es impar,}$$
$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par} + \text{par} = \text{par}$$
$$\text{impar} + \text{par} = \text{par} + \text{impar} = \text{impar.}$$

En otras palabras, se colorean de negro los cuadrados de los dos lados, y luego se colorean los cuadrados de blanco si los dos que están encima de ellos tienen el mismo color, de negro si tienen colores diferentes. No se tarda en llenar todo el triángulo.



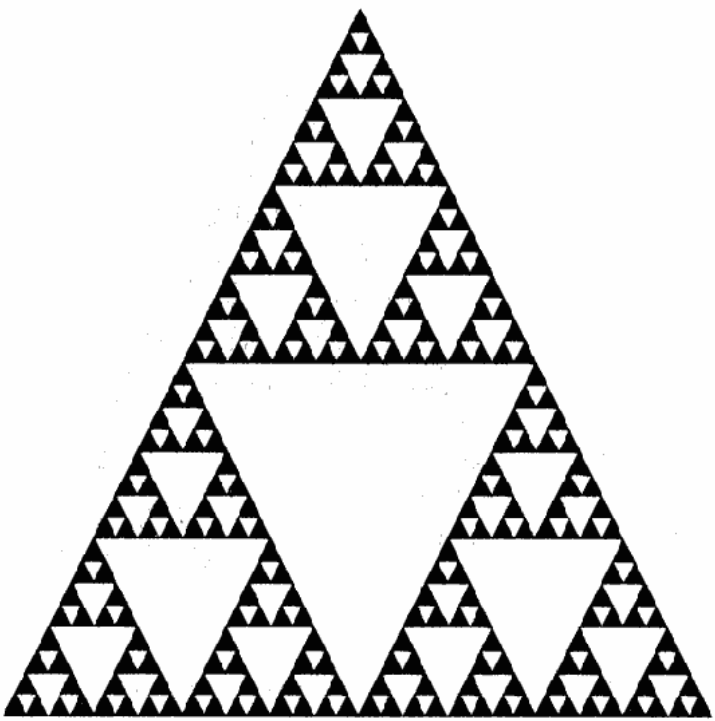
9.2. Patrones en el triángulo de Pascal: blanco = par, negro = impar.

El resultado es la figura 9.2, un contrastante e intrincado diseño de triángulos negros y blancos. Se parece mucho al *estuche de Sierpinski* (figura 9.3). Para hacer un estuche de Sierpinski se empieza con un triángulo negro. Divídase en cuatro triángulos iguales y píntese de blanco el del medio; repítase lo mismo con los tres triángulos negros más pequeños, y así hasta el infinito. El estuche de Sierpinski pertenece a la clase de objetos geométricos denominados *fractales.* Un fractal es algo que tiene una estructura detallada por mucho que se lo magnifique. Por ejemplo, si se magnifica la superficie de una esfera

perfecta, se vuelve chata y sin rasgos: no es un fractal. Pero los triángulos menguantes del estuche de Sierpinski continúan sin cesar, y el objeto luce complicado por mucho que se lo magnifique. Así que la estuche de Sierpinski es un fractal.

Si dibujamos un triángulo de Pascal en blanco y negro con una cantidad enorme de hileras, y lo miramos desde lejos, luce igual que un estuche de Sierpinski. Esto tiene una curiosa consecuencia.

Entre los enteros, los números pares y nones recurren con igual frecuencia. Un número escogido al azar tendrá 1/2 probabilidad de ser par, y 1/2 probabilidad de ser impar. Se puede esperar que lo mismo ocurra con los números del triángulo de Pascal: mitad pares, mitad impares. Ahora bien, la probabilidad de obtener un número par en un triángulo de Pascal es la proporción que está coloreada de blanco en la figura 9.2, y la probabilidad de obtener un número impar es la proporción coloreada de negro.



9.3 El estuche de Sierpinski, un fractal derivado de un triángulo dividido una y otra vez en cuatro.

Para cantidades cada vez mayores de filas en el triángulo de Pascal, estas dos probabilidades se aproximan cada vez más a las proporciones correspondientes del estuche de Sierpinski. Así que podemos preguntar: *¿qué proporción de un estuche de Sierpinski es blanca?* Deténgase a pensarlo un instante antes de que yo delate el

juego.

Bien, allá va. Pensemos cómo está construido el estuche. Empecemos con un triángulo negro de superficie total 1. Pintemos un triángulo boca abajo, de un cuarto de ese tamaño, blanco. Esto nos deja tres triángulos negros más pequeños, cada cual de superficie 1/4, y el resto de la superficie negra se ha reducido de 1 a 3/4. Ahora pintemos un triángulo blanco boca abajo en cada uno de éstos: la superficie negra se reduce a $3/4 \times 3/4$. Repitamos indefinidamente. El estuche aparece cada vez más pintado de blanco, y la superficie negra se transforma en $3/4 \times 3/4 \times \ldots 3/4$, lo cual tiende a cero cuando la cantidad de etapas se vuelve muy grande.

En otras palabras, la parte negra de un estuche de Sierpinski tiene una superficie total 0, la parte blanca tiene superficie 1.

En términos del triángulo de Pascal, esto significa que *casi todos los números que hay en él son pares.* En un triángulo de Pascal muy grande, los números nones aparecen con una probabilidad muy cercana a cero. Así que hemos aprendido algo sorprendente acerca del triángulo de Pascal, pensando fractalmente en el estuche de Sierpinski.

¿Qué hay acerca de las generalizaciones? Los impares y pares son casos especiales de la "aritmética modular". Les recordaré de qué se trata.

Escojamos un número, por ejemplo 5, al que llamaremos *módulo.* Reemplacemos todos los números por sus *restos* en una división por 5. Como los restos tienen que ser de menos de 5, sólo sobreviven los números 0, 1, 2, 3 y 4. Aún es posible hacer aritmética en este despojado sistema numérico. Usted puede sumar dos números cualesquiera de ellos, si de nuevo recuerda sustituir la suma por su resto después de dividir por 5. El resultado se llama *aritmética de módulo 5,* o, más brevemente (mod 5). En esta rama de la aritmética, $2 + 2 = 4$ como de costumbre, pero $3 + 4 = 2$. Ello es porque $3 + 4 = 7$, y el resto de la división de 7 por 5 es 2. La tabla de adición (mod 5) es:

Usted puede utilizar cualquier módulo, no sólo 5; y también puede multiplicar, aunque no lo necesitamos.

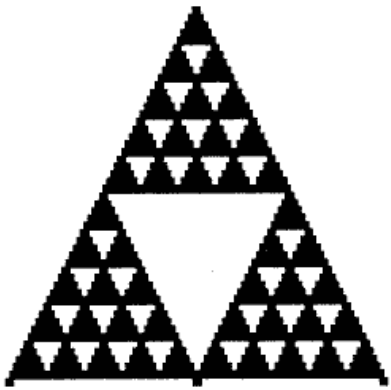
El distingo entre números pares e impares es sólo aritmética (mod

2). Un número par deja un resto 0 en una división por 2; un número impar deja un resto 1. Así que todos los números pares son 0 (mod 2) y todos los impares son 1 (mod 2).

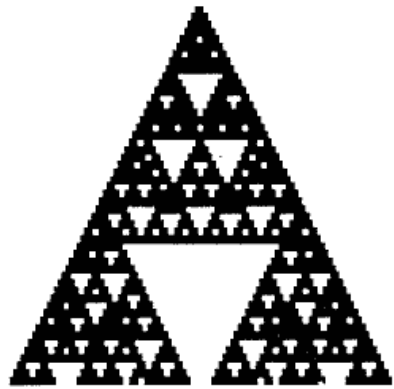
Así podemos generalizar la figura 9.2 preguntando "¿Cómo luce el triángulo de Pascal respecto de (mod 5)?". En esta pregunta el 5 se puede reemplazar por cualquier otro número. Los resultados, para diversos módulos, se muestran en la figura 9.4. Aquí los cuadrados blancos se corresponden con los números que son 0 para el módulo escogido (es decir, múltiplos exactos del módulo), y todos los demás valores son negros.

3

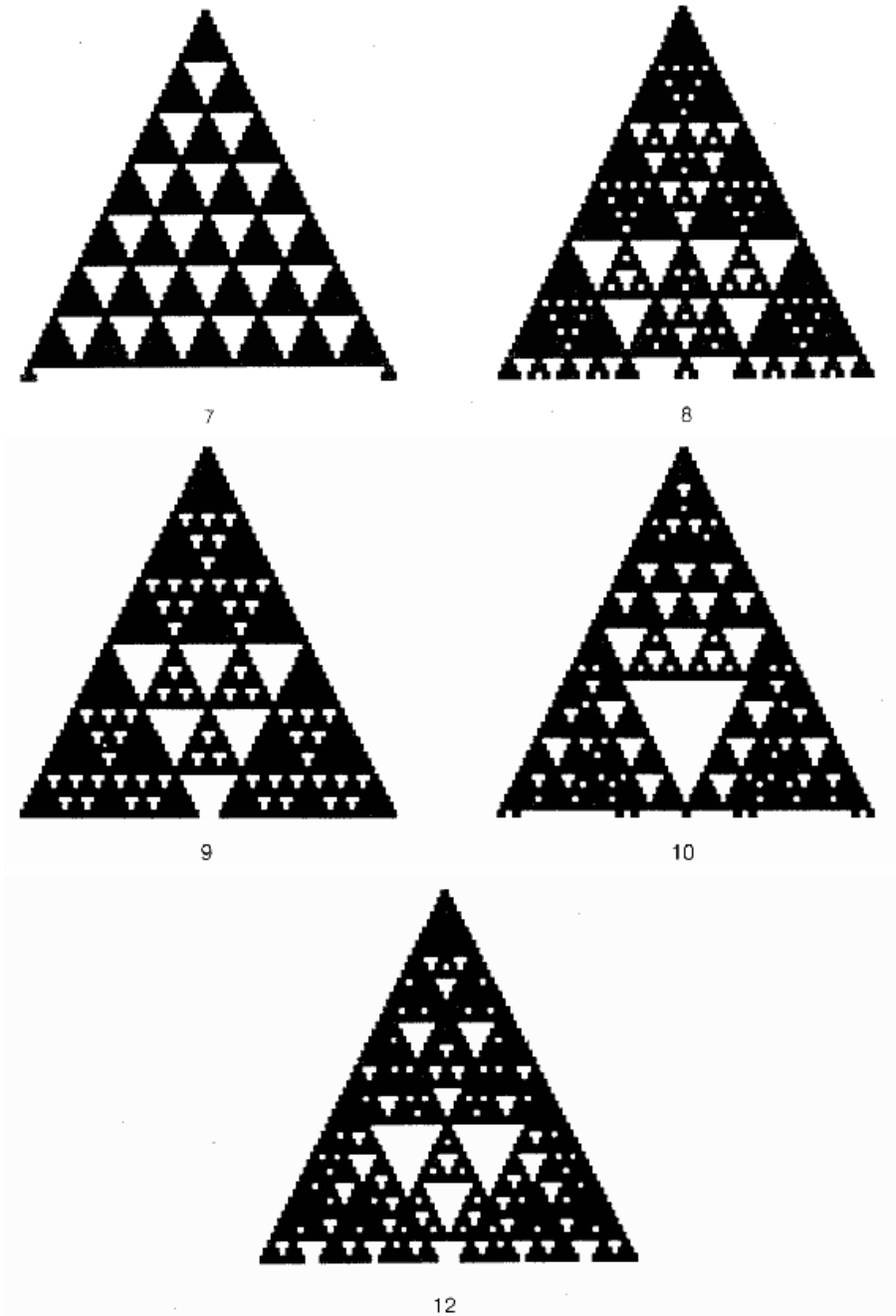
4



5



6



9.4. Los patrones del triángulo de Pascal en módulos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Los patrones de los módulos primos (3, 5, 7) tienden a ser más simples.

Usted mismo puede generar estas figuras, usando la regla simbólica para formar el triángulo de Pascal, pero llevando a cabo la adición por medio de la tabla aritmética del módulo escogido. De nuevo observará sorprendentes patrones de regiones triangulares.

Usted puede disfrutar produciendo sus propios patrones. En tal caso, hay muchos modos de explorar nuevos territorios. Usted puede:

1. Modificar la regla para colorear.

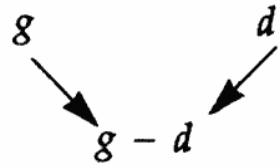
Por ejemplo: ¿qué ocurre si pintamos la célula k^a de la fila n de negro cuando C*(n,k)* es 1 (mod 5)? O, más ambiciosamente, si usted usa un esquema de colores 0 = blanco, 1 = rojo, 2 = amarillo, 3 = azul, 4 = negro?

2. Modificar el módulo

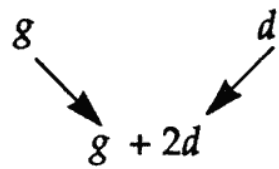
¿Qué ocurre con (mod 3), (mod 11), (mod 1001?)

3. Modificar las reglas

Empiece con diferentes números en los lados del triángulo, no sólo 1. Transforme cada número en la diferencia de los dos de arriba, no la suma,



O transfórmelo en la suma del número de la izquierda y el doble del de la derecha:



Para esto no necesita un ordenador. Podrá obtener treinta o cuarenta hileras a mano mientras el módulo no sea demasiado grande.

De cualquier modo, así terminamos con el diagrama del libro de Chaitin. Pero el teorema era mucho más llamativo. Nos permite predecir si una célula será negra o blanca, sin calcular el correspondiente coeficiente binomio.

Para explicar el teorema necesito otra idea: la representación de los números según una base dada. El modo habitual de escribir los números es la notación de base 10 (o decimal). Esto significa, por ejemplo,

$$321 = (3 \times 10 \times 10) + (2 \times 10) + (1 \times 1).$$

En la base 7, por ejemplo, el mismo símbolo, 321, significaría

$$(3 \times 7 \times 7) + (2 \times 7) + (1 \times 1),$$

que es 162 en decimal.

En particular, la notación base 2, o binaria, es lo que usan los ordenadores. En binario los únicos dígitos son 0 y 1. He aquí una breve tabla de notación binaria.

Decimal	Binario
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Supongamos que tenemos dos números n y k en notación binaria. Los escribimos uno encima del otro con los dígitos correspondientes alineados. Por ejemplo si $n = 1001$ (9 decimal) y $k + 101$ (5 decimal), entonces escribimos

$$\begin{array}{r} 1001 \\ 101 \end{array}$$

Digamos que k implica n, lo cual se expresa $k \to n$, si cada dígito binario del número inferior k es menor o igual que el dígito de n que está encima. En otras palabras, $k \to n$ si usted nunca obtiene un par de dígitos correspondientes que luzcan como

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

De lo contrario escriba $k \not\to n$. (El curioso uso de “implica” viene de operaciones de lógica de ordenador.)

Por ejemplo, para ver si $9 \to 5$, miramos lo que escribí hace unas líneas, y vemos que la tercera columna a partir de la derecha tiene 0 encima, 1 al pie. Así que $9 \not\to 5$. Por otra parte, $21 \to 23$ porque en binario éstos son

$$\begin{array}{c} 10111 \\ 10001 \end{array}$$

y ningún dígito de abajo es mayor que el dígito de arriba.

El teorema formulado por Chaitin —y, como él dice, demostrado hace un siglo por el gran especialista francés en matemática recreativa Edouard Lucas — es el siguiente:

Teorema de Lucas

C (*n,k*), el ítem *k*° en la fila *n* del triángulo de Pascal es:
par si $k \not| n$,
impar si $k \to n$.

Esto brinda un modo rápido y eficiente de verificar la paridad (calidad de impar o par) de C*(n,k)*. Por ejemplo, como 21 → 23, se sigue que C(23,21) debe ser impar. De hecho, C(23,21) = 253. Para hallar la paridad de, por ejemplo, C(17,5), lo expresamos en binario:

10111
00101

Rellene el número de abajo con ceros para que ambos tengan la misma longitud:

10111
00101

La tercera columna a partir de la derecha significa que $5 \not| 17$, así que C(17,5) es par. De hecho, C(17,5) = 24752.

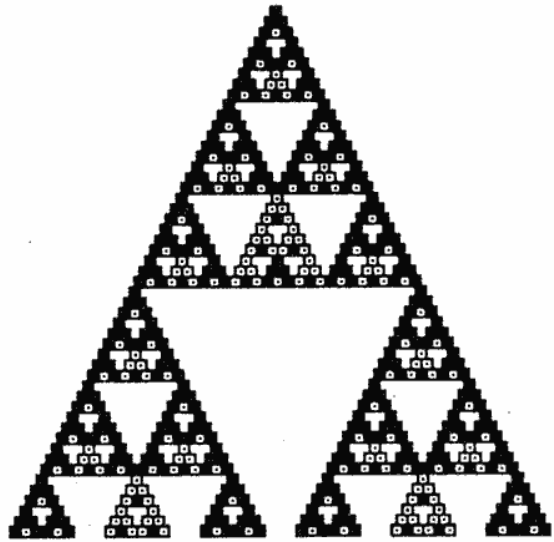
Si lo desea, puede verificar el teorema de Lucas con otros casos: no voy a demostrarlo aquí. Es un resultado notable, pues relaciona la aritmética del triángulo de Pascal con el módulo 2 y la notación de base 2. Las propiedades significativas de los números no suelen depender de sus dígitos en un sistema de notación, pero aquí sí.

¿El teorema de Lucas tiene una aplicación general a módulos que no sean 2? Tratemos de averiguarlo.

El primer caso interesante es el módulo 3. El patrón del triángulo de Pascal (mod 3) se muestra en la figura 9.5 Aquí se muestra la célula k^a de la fila *n:*

blanco si $C(n,k) = 0 \pmod 3$
negro si $C(n,k) = 1 \pmod 3$
punteado si $C(n,k) = 2 \pmod 3$.

Claramente el problema implica cierta estructura: el patrón no es azaroso. ¿Pero podemos predecir el patrón entero, en vez de calcular sólo fragmentos?



9.5 El triángulo de Pascal (mod 3). Blanco = 0 (mod 3), negro = 1 (mod 3), punto = 2 (mod 3).

El teorema de Lucas relaciona C(*n,k)* (mod 2) con los dígitos de *n* y *k* (base 2). Parece natural tratar de relacionar C*(n,k)* (mod 3) con los dígitos de *n y k* (base 3). Experimentemos. Probemos con la fila *n* = 11 (decimal), que es el 102 en base 3. El patrón de valores es

(decimal)	11
(mod 3).	C(11,*K*)

Escribiendo *n* y *k* según la base 3, y juntando casos que den la misma respuesta, hallamos:

C*(n,k)* = 0 (mod 3):

n	102
k	012

C*(n,k)* = 1 (mod 3):

n	102
k	002

C *(n,k)* = 2 (mod 3):

n	102
k	001

Por comodidad he vuelto a rellenar *k* con ceros adicionales a la izquierda, para que cada número tenga la misma cantidad de dígitos.

Tal como en binario, signifique $k \rightarrow n$ que "cada dígito de k es menor o igual que el dígito correspondiente de n"; pero esta vez usemos dígitos de base 3. Aquí $k \rightarrow 102$ sólo cuando k es 000, 001, 002, 100, 101 y 102. Comparando con los resultados antedichos, hallamos que esto ocurre precisamente cuando C(n,k) es 1 o 2 (mod 3). En otras palabras, C(n,k) es 0 (mod 3) —es decir, múltiplo de 3— sólo cuando $k \blacklozenge n$, cuando n y k están escritos en base 3.

No hemos demostrado esto, pero si usted lo verifica experimentalmente hallará que siempre da resultado. Se puede considerar como una generalización del teorema de Lucas, pues éste dice que C(n,k) es 0 (mod 2) siempre y cuando $k \blacklozenge n$ (base 2). Simplemente cambiamos "2" a "3".

Sin embargo, si un número no es par tiene que ser impar. Así que el teorema de Lucas brinda información completa (mod 2). Nuestra generalización no brinda información completa (mod 3), pues cuando $k \ddagger n$ el valor podría ser 1 o 2 (mod 3). ¿Cómo podemos decidir cuál?

Antes de continuar leyendo, tal vez usted desee probar sin ayuda. Le daré una pista. Digamos que un par de dígitos correspondientes *de* n y k *es crucial* si n tiene dígito 2 y k tiene dígito 1. Tome nota del número de pares cruciales.

He aquí mi respuesta: un primer intento de un Gran Teorema de Lucas. ¡Luce muy extraño!

Teorema de Lucas (mod 3)

C(n,k) (mod 3) es:
0 si $k \blacklozenge n$,
1 si $k \rightarrow n$ *y* el número de pares cruciales de dígitos es par,
2 si k n y el número de pares cruciales de dígitos es impar.

Por ejemplo, si usted quiere saber C(62,30) (mod3), tan sólo escriba

2022 base 3 $n = 62$ decimal =
1010 base 3. $k = 30$ decimal =
↑↑

Primero, $k \rightarrow n$ así que el resultado es 1 o 2. Hay dos pares cruciales, marcados por flechas. Como dos es par, sabemos que C(62,3) tiene que ser 1 (mod 3).

Esto es sorprendente. C(62,30) es un número de dieciocho dígitos, y no sé qué es exactamente. ¡Pero sí sé qué es (mod 3)!

Para una verificación más accesible del teorema, probemos C(14,10). Tenemos

base 3 $n = 14$ decimal $= 112$
base 3. $k = 10$ decimal $= 101$

↑

De nuevo $k \to n$, pero hay un sólo par crucial. Como uno es impar, C(14,10) debe ser 2 (mod 3). De hecho, C(14,10) = 1001 = 999 + 2 = 3 × 333 + 2, así que estoy en lo cierto.

Así que al menos tenemos una *respuesta* para el módulo 3, aunque es desconcertante. ¿Por qué depende de pares cruciales? La matemática tiene que ver con la comprensión, no solo con las respuestas: ¿qué está pasando aquí?

Cuando empecé a pensar en otros módulos, no entendía cómo hacer funcionar pares cruciales. Me atasqué. Esto no es infrecuente en la investigación matemática. Un truco del oficio consiste en recurrir a las ideas de otros. Así que mencioné el resultado (mod 3) a un colega, John Jones. Es topólogo, así que pensé que era probable que se hubiera cruzado con este teorema en la teoría de números combinatorios. Pero la matemática está llena de sorpresas.

—Oh sí —dijo—. Eso es muy importante en topología. La respuesta para cualquier módulo primo está dada en *Cohomology Operations* de Epstein y Steenrod.

Tenía razón. (La oficina de David Epstein está a pocos pasos de la mía. La vida está llena de extrañas coincidencias. Siga leyendo y encontrará más.) Al día siguiente Mike Paterson, del Departamento de Informática, me dijo que el resultado figura en el volumen 1 del monumental clásico *The Art of Computer Programming* de Donald Knuth. Dos días después llegó el número 2 del volumen 10 de la revista *Mathematical Intelligencer,* y en la página 56 había un largo artículo de Marta Sved, con figuras muy similares a las que he dibujado aquí, el teorema general para cualquier módulo, e información sobre preguntas emparentadas, tales como los números de Stirling.

Todo esto me confirma la unidad y la diversidad de la matemática, los problemas de la explosión de la información y la ineludible perversidad del universo.

Sea como fuere, explicaré qué es el genuino Gran Teorema de Lucas. Indica cómo computar C(*n,k*) con cualquier módulo primo *p*. Y la idea es mucho mejor que los pares cruciales, que de pronto lucen como goma de mascar comparados con el patrón más profundo.

Describiré el teorema mediante ejemplos. Supongamos que deseamos hallar C(216,159) (mod 7). Primero escribimos 216 y 159 en base 7. Es decir, los expresamos como $a \times 49 + b \times 7 + c$ y los escribimos en la notación *abc*. El resultado es que 216 (base 10) es

igual a 426 (base 7) y 159 (base 10) es igual a 315 (base 7). Escribamos éstos uno debajo del otro,

426
315

y formemos los tres coeficientes binomios dados por las columnas: C(4,3), C(2,1) y C(6,5). Resolvamos éstos:

$$C(4,3) = 4$$
$$C(2,1) = 2$$
$$C(6,5) = 6$$

y multipliquemos los resultados para obtener $4 \times 2 \times 6 = 48$. Finalmente reducimos este (mod 7) para obtener 6. *Esta es la respuesta.*

Funciona para cualquier módulo primo. Si usted obtiene coeficientes binomios "imposibles" C(*n,k*) donde *n* es más pequeño que *k,* debe tratarlos como si fueran cero.

¿Cómo encaja esto con la hoy desacreditada idea de los pares cruciales, que resolvía el problema (mod 3)? La respuesta es que cualquier par crucial aporta un factor de 2 al valor que deseamos, mientras que los pares no cruciales siempre aportan un factor 1. (Cuando $k \rightarrow n$ surgen factores no cero.) Ahora bien, $2 \times 2 = 1$ (mod 3). Los pares de dos se "cancelan entre sí". De modo que el producto de todos los factores es 1 si hay un número par de dos, y 2 por otra parte. ¡Los pares cruciales son señuelos falsos!

Y eso demuestra que usted no debe quedar satisfecho con el primer patrón que descubra. Siempre puede haber una explicación mejor y más profunda.

He aquí algunos interrogantes para reflexionar.

1. Escoja cualquier módulo m. Para los números *k* y *n* escritos en notación base *m*, defina $k \rightarrow n$ si cada dígito de *k* es menor o igual que el correspondiente dígito de *n*. Una generalización posible del teorema de Lucas (mod 2) es: C(*n,k*) es 0 (mod m) siempre y cuando $k \blacklozenge n$. ¿Es cierto?
2. En caso contrario, ¿para qué *n* es válido?
3. ¿Cómo se puede determinar C(*n,k*) (mod 4)?
4. ¿Cómo se puede determinar C(*n,k*) (mod 5)?
5. ¿Cómo se puede determinar C(*n,k*) (mod 6)?

Soluciones

1. No. Por ejemplo, en base 4 tenemos $2 \blacklozenge 4$ porque 2 es 02 y 4 es

10 en base 4; pero C(4,2) = 6 que es 2 (mod 4), no 0.

2. El Gran Teorema de Lucas demuestra que la respuesta incluye todos los módulos *primos*.

3. Como $4 = 2^2$, esto queda bajo el encabezamiento general de módulos de potencia prima. Los resultados en este caso son igualmente satisfactorios pero mucho más complicados, y remito al lector al artículo de Marta Sved citado abajo.

4. Esta es una consecuencia directa del Gran Teorema de Lucas, porque 5 es primo.

5. Esto se puede responder dividiéndolo en dos partes. Siempre se puede deducir cómo es un número (mod 6) siempre que lo conozcamos (mod 2) y (mod 3). He aquí una tabla que muestra cómo:

mod 2	*mod 3*
0	0
0	1
0	2
1	0
1	1
1	2

Por ejemplo, un número es 5 (mod 6) siempre y cuando sea 1 (mod 2) y 2 (mod 3). Así que podemos hallar C(*n*,*k*) (mod 6) combinando sus valores (mod 2) y (mod 3). Según el Gran Teorema de Lucas, se los puede hallar escribiendo *n* y *k* con base 2 y luego con base 3.

Así que ahora han entrado en el cuadro dos bases numéricas diferentes. Me sorprendería que usted pueda responder la pregunta 5 usando sólo las expansiones de *n* y *k* y a base 6. Comuníquemelo si lo consigue.

Otras lecturas

Gregory J. Chaitin: *Algorithmic Information Theory,* Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

Martin Gardner: *Mathematical Carnival,* Harmondsworth, Penguin, 1978.

Benoit Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature,* San Francisco, Freeman, 1982.

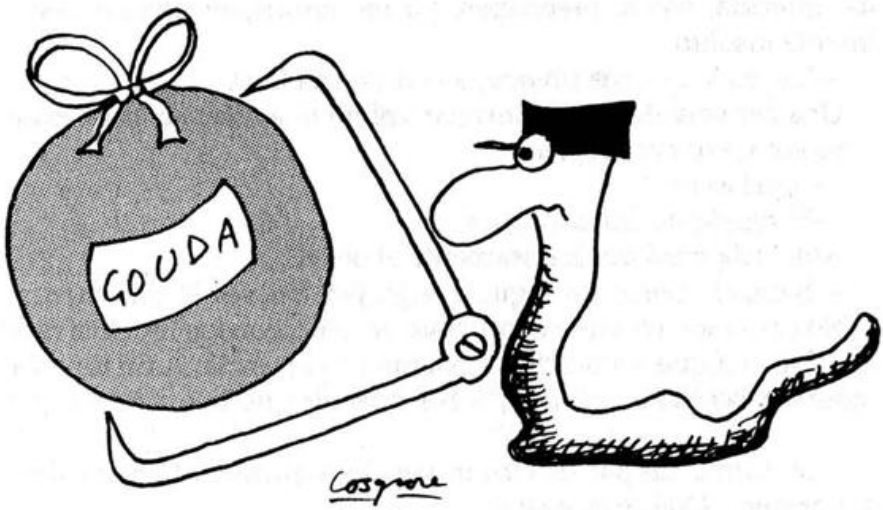
Alfréd Rényi: *A Diary in Information Theory,* Cambridge, Cambridge

University Press, 1987.

Ian Stewart: *Concepts of Modern Mathematics,* Harmondsworth, Penguin, 1981.

Marta Sved: “Divisibility — with Visibility”, *Mathematical Intelligencer,* 10/2 (primavera 1988), págs. 56-64.

10. El regreso del gusano



Enrique Gusano estaba enrollado en su sillón favorito junto al fuego, leyendo las páginas financieras del periódico.

—Las acciones de Larvacorp bajaron un punto hoy, Ana Lida... Pero Cresa & Cía. anda bien, y Carcoma Viscosa anda a las mil maravillas...

—Enrique, sabes muy bien que no tenemos acciones. Deja ese periódico y usa el cerebro para algo importante.

—Sí, querida —dijo Enrique, pensando *pájaro que madruga picotea la oruga* mientras plegaba el periódico con tristeza—. ¿Qué cuestión importante tenías en mente?

—La cuestión del regalo de cumpleaños de mi hermana Gusa —

dijo Ana Lida.

—Ah, sí. ¿Qué te parece un par de calcetines?

—¿Para qué quiere un gusano un par de calcetines?

—Un calcetín, pues. Un calcetín tejido.

—Le regalamos un calcetín el año pasado, Enrique.

—¿El izquierdo o el derecho?

—El izquierdo.

—Entonces este año le regalamos el derecho.

—Enrique, le regalamos el derecho hace dos años. No, quiero enviarle algo más considerado, algo que nos haya dado más trabajo.

—Algo que *me* haya dado más trabajo —masculló Enrique—. Nada, querida. No te preocupes, yo me encargaré. Pensaré en algo realmente insólito.

—Eso es lo que me preocupa —dijo Ana Lida.

Una semana después, Enrique volvió al agujero con un paquete enorme envuelto para regalo.

—¿Qué es eso?

—El regalo de Gusa, primor.

Ana Lida miró desdeñosamente el objeto.

—Bien, al menos conseguiste algo grande, sea lo que fuere —dijo —. No como los aros que compraste en 1962, con los broches rotos.

—No creí que los broches tuvieran importancia. A fin de cuentas, los gusanos no tienen orejas. ¡Debes admitir que le quedaron perfectos!

—Sí. Como un par de cinturones de seguridad. Pero no discutamos, Enrique. ¿Qué compraste?

Orgullosamente, Enrique desenvolvió el paquete.

Ana Lida bajó la cola con desánimo.

—¿Pizza?

—La mayor pizza del mundo, cariño. ¡Ideal para una reina!

—La masa parece delgada.

—La más delgada del mundo. Más delgada que papel. ¡Exquisita cuando la cocinas!

—Mmh. Pero, Enrique, debe de medir por lo menos un metro.

—Exactamente un metro, Ana Lida.

Ana Lida olisqueó.

—Bien, pero no me culpes si tienes problemas para despacharla por correo.

—Despachar pizza por correo no es problema —dijo Enrique.

—Son 5 libras —dijo Héctor, el gusano empleado de correos. Examinó el paquete con cautela—. A menos... Excúseme, ¿qué tamaño tiene esa encomienda?

—Un metro de anchura.

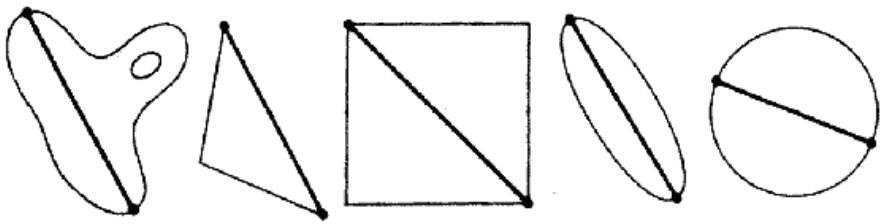
—¿A qué se refiere con anchura?

—La distancia máxima en una recta entre dos puntos cualesquiera.

—¡Cielos!

—¿A qué se refiere con "¡Cielos!"?

—Creo que usted alude a lo que en la oficina postal llamamos técnicamente el diámetro (figura 10.1). Debo informarle que no habría problemas con un diámetro inferior a 1 metro, pero lamentablemente las reglas postales establecen que sólo se aceptan encomiendas de menos de 1 metro de diámetro. —Extrajo un gigantesco par de calibradores y midió la encomienda—. Sí, tal como temía. Un metro precisamente. Temo que no me permitan aceptarlo.



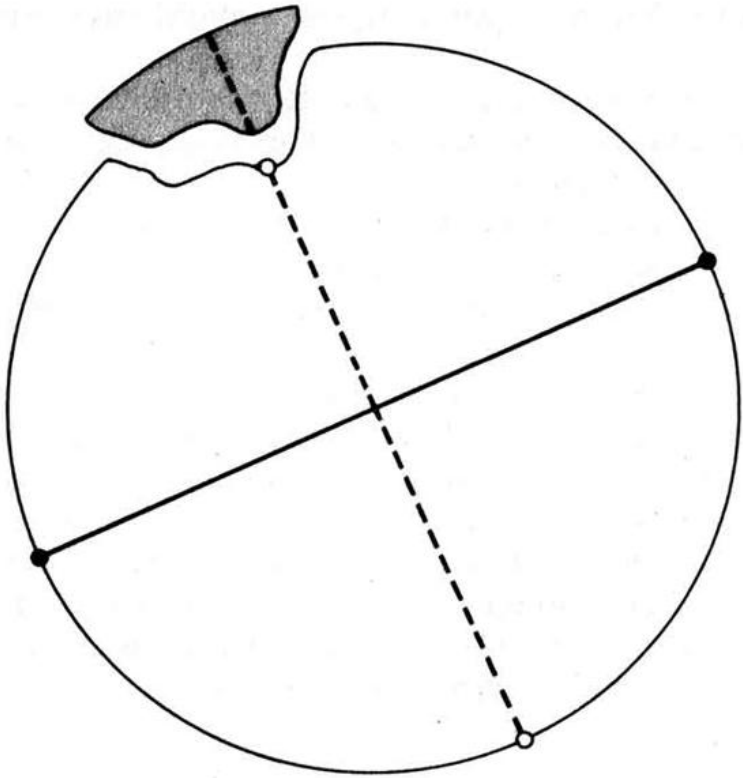
10.1. El diámetro de una figura plana (o de dimensiones más elevadas) es la mayor distancia en una línea recta entre cualesquiera de dos de sus puntos.

—Vamos, sea razonable —dijo Enrique—. Siempre puedo serrucharla un poco.

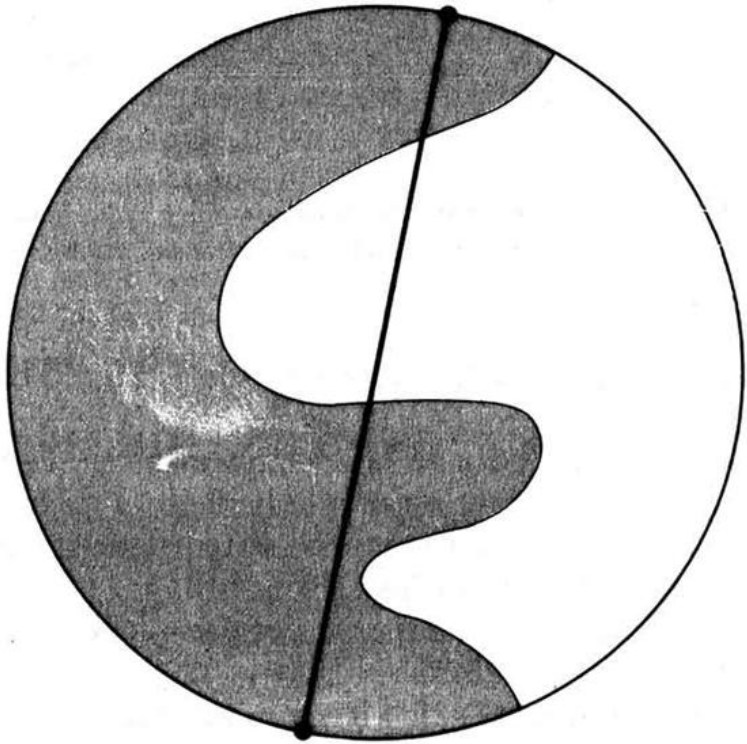
—Sí, pero eso no reducirá la anchura máxima. Por ejemplo, supongamos que la pizza fuera un círculo perfecto, 1 metro de diámetro. Si usted la corta un poco tendría menos de un metro en una dirección, pero aún tendría un metro en otras. (Figura 10.2) —No creo que sea exactamente circular —dijo Enrique—. A mí me parece un poco irregular.

—El mismo principio —dijo Héctor airosamente—. Desde luego, siempre puede cortarla y enviarla en porciones.

—Puah —dijo Enrique—. Lo lamento. Hablar de cortar cosas siempre me pone nervioso. Mi madre se salvó por poco de una cortadora de césped y yo casi nací como mellizos... Pero usted tiene razón... Podría cortarla por la mitad.

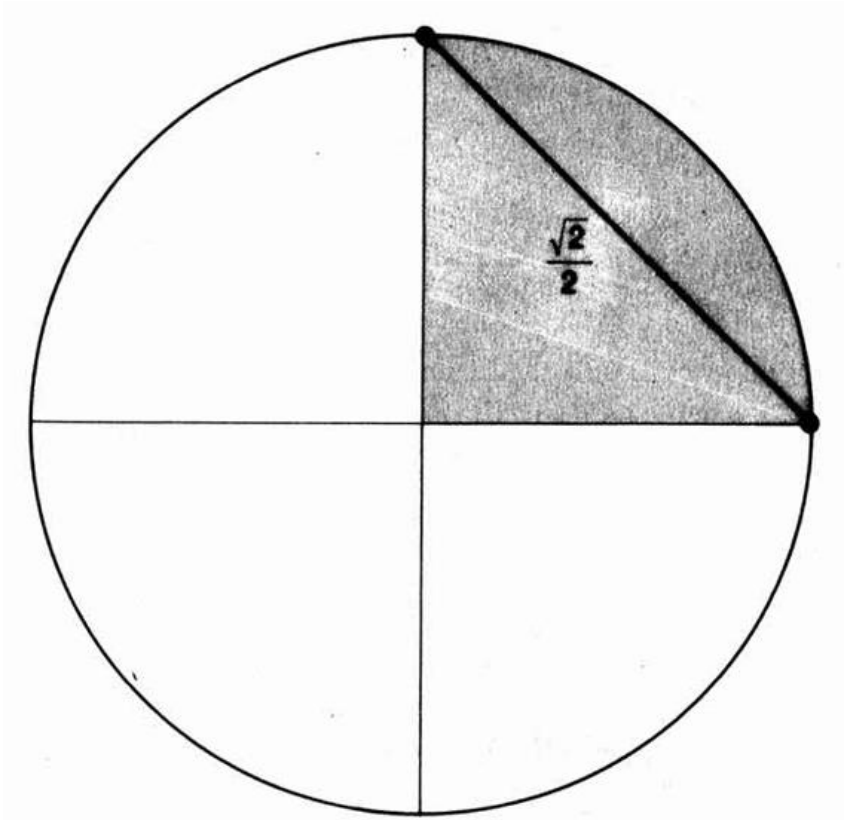


10.2 Al cortar un pequeño trozo del círculo no reducimos el diámetro.



10.3. Si un círculo unidad se corta en dos partes, al menos una parte contiene dos puntos diametralmente opuestos y por tanto tiene diámetro 1.

—Tal vez no sirva. Si usted corta un círculo de un metro por la mitad, al menos una parte tendrá 1 metro de diámetro. (Figura 10.3)
—Bien, en cuartos entonces. Eso serviría (figura 10.4). No sé precisamente cuál es el diámetro, pero sin duda es inferior a 1 metro.



10.4. Un círculo de diámetro 1 cortado en cuatro presenta fragmentos con diámetro (√2)/2 = 0,7071..., más pequeño que 1...

—Excelente. Eso le costará 20 libras, señor.

—¿Qué? —gritó el consternado Enrique.

—Tarifa estándar: 5 libras por encomienda.

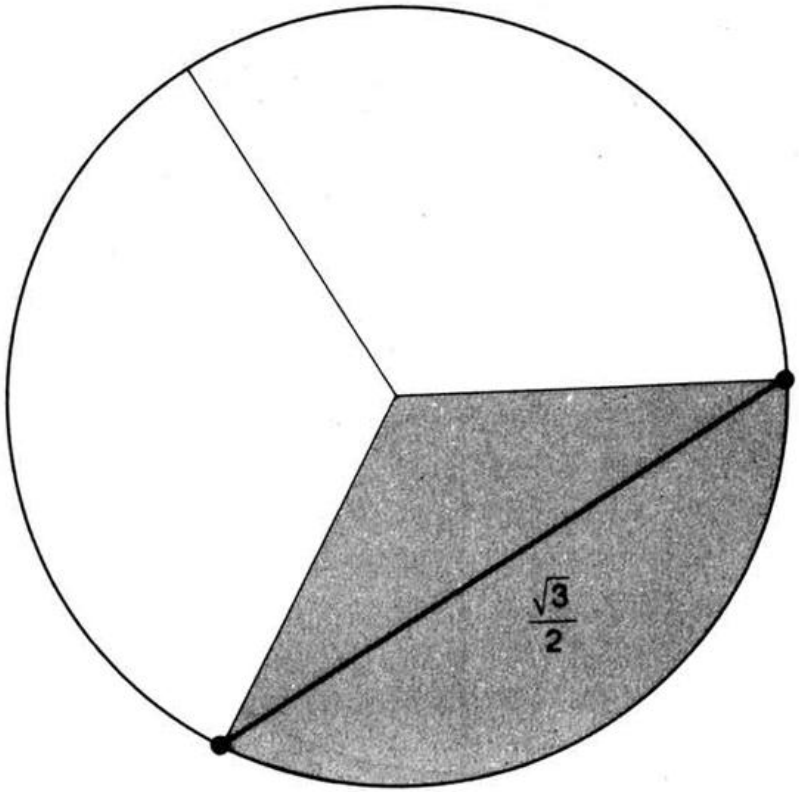
—No gastaré 20 libras para enviarle a mi cuñada una pizza que me costó sólo 3 libras.

—Entonces usted tendrá que cortarla en menos porciones. Si yo fuera usted, la cortaría en la menor cantidad posible.

—¡Buena idea! —dijo Enrique. *La primera frase útil que dice este idiota*—. ¿Qué número sería ése?

El empleado del correo miró el cielo raso.

—Tres, para una pizza circular (figura 10.5). Pero en general no tengo la menor idea. Depende de la forma que tenga.



10.5 ...pero un círculo de diámetro 1 cortado en tres presenta fragmentos de diámetro (√3)/2 = 0,8660..., también más pequeño que 1.

—No se preocupe por la forma. ¿Cuál es el número más pequeño que funcionará para cualquier forma? Puedo ver cómo hacerlo en cuatro partes, pero quizá sea demasiado. Aunque el ejemplo del círculo muestra que dos porciones no son suficientes... Así que el número menor tiene que ser tres o cuatro.

—Aún no tengo la menor idea.

—Tampoco yo —dijo Enrique—. Pero, al contrario de usted, tengo una mente inquisitiva y sagaz. Lo averiguaré...

Enrique Gusano se enroscó en su silla favorita, haciendo irritadas anotaciones en un papel.

—Querido Enrique, ¿por qué estás garrapateando?

—Eh... es un problema matemático, querida.

—Oh.

—Dada una forma en el plano, del diámetro de una unidad, debes cortarlo en varias partes, cada cual de diámetro inferior a 1 unidad.

—Córtala en dos, Enrique.

—Sí, querida, eso funcionaría, pero costaría una fortuna despacharla.

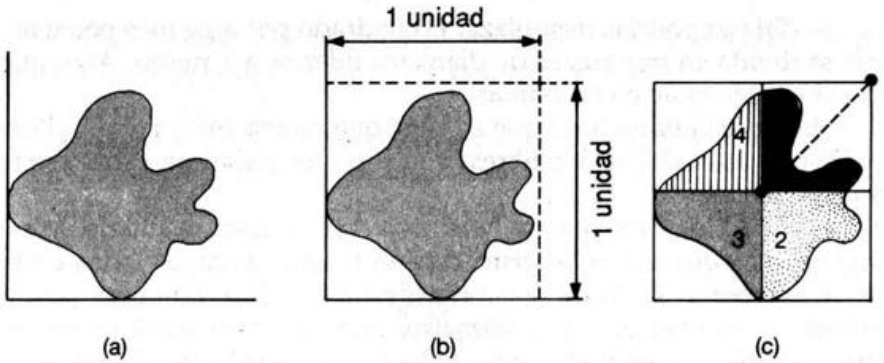
—Enrique, ¿de qué estás...?

—Quiero encontrar la menor cantidad de piezas que funcionen siempre, no importa cuál sea la forma. Por eso, querida, estaba "garrapateando". Una cuestión de la más alta hondura intelectual.

—Enrique, estás diciendo disparates.

—Sí, querida. La respuesta es tres o cuatro.

—¿Cómo lo sabes, Enrique? Tú mismo dijiste que no sabes cuál es la forma.



10.6. (a) Cualquier forma encaja cómodamente en un rincón de ángulo recto, (b) Si tiene diámetro 1, no puede cortar dos líneas paralelas a las paredes, a una unidad de distancia. Por tanto se encuentra dentro de un cuadrado unidad, (c) Tal cuadrado se puede cortar en cuatro partes, cada cual de diámetro (√2)/2 = 0,7071...; por ende, lo mismo vale para la forma original.

—Ah, pero puedo demostrar que toda figura de diámetro de 1 metro está contenida dentro de un cuadrado de 1 metro de lado. Para ver por qué, acomoda la forma contra un rincón en ángulo recto (figura 10.6[a]). Entonces no se puede proyectar por encima de dos líneas paralelas a las paredes, sino a 1 metro de distancia (figura 10.6[b]). Porque, si así lo hiciera, tendría más de 1 metro de diámetro.

—De acuerdo. Eso es obvio, Enrique.

—Cuando las ideas geniales se expresan con suficiente claridad, aun el entendimiento más obtuso puede captarlas —declaró Enrique.

—Como quieras. Pero tu genial cerebro aún no ha explicado con suficiente claridad por qué deseas rodear la forma con un cuadrado.

—Ah... Bien, si corto el metro cuadrado en cuatro, entonces la forma también se divide en cuatro (figura 10.6[c]). Cada cual tiene un diámetro de a lo sumo (√2)/2 = 0,7071... metros, que es menos que 1. Pues ésa es la longitud de la diagonal de los cuadrados más pequeños.

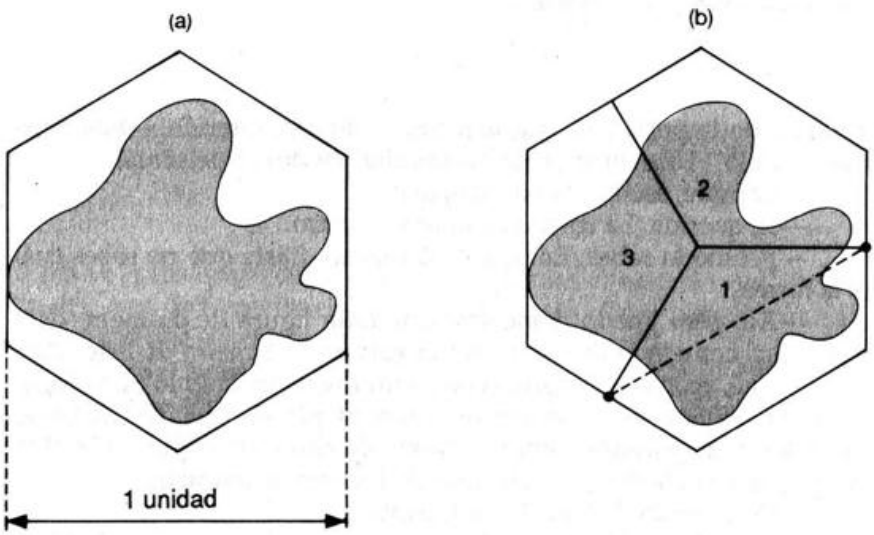
—¿Sabes, Enrique, que a veces eres casi tan inteligente como crees que eres...? ¿Puedes dividir un cuadrado de un metro de lado en tres

piezas de diámetro inferior al?

—No lo creo —dijo Enrique. *(Tiene razón. ¿Puede usted probarlo?)* —Tal vez podrías reemplazar el cuadrado por algo más pequeño, que se divida en tres piezas de diámetro inferior a 1 metro. Algo que no sobresalga tanto en las puntas.

Enrique Gusano tuvo que admitir que no era mala idea... ¿Pero qué forma usaría? Cogió la libreta y se puso a garabatear. Pronto se le ocurrió una idea.

—Ana Lida, creo que un hexágono regular dará resultado. Mira, supongamos que rodeo la forma con un hexágono cuyos lados estén separados por 1 metro de distancia (figura 10.7[a]). Entonces puedo cortarlo en tres partes cuyos diámetros sean menores que 1 metro (figura 10.7[b]). *(¿Cuál es el diámetro de las tres partes?)* No sé si semejante hexágono existe en general, pero... —lo intenta—. ¡Ciertamente funciona para la pizza de Gusa! ¡Mira!



10.7. (a) Rodee la forma de un diámetro unidad con un hexágono regular cuyos lados opuestos se encuentren a una unidad de distancia, (b) Corte en tres partes, cada cual de diámetro inferior a 1.

—Tendrías que despachar el presente de Gusa ahora, Enrique. Aunque no tengas una demostración general.

—Por cierto, querida.

—Y otra cosa, Enrique.

—Dime, mi amorosa larvita.

—No olvides que la semana próxima es el cumpleaños de mi madre. Trata de pensar en algo que podamos enviarle.

—¿Un pañuelo?

—No seas tonto, Enrique. Los gusanos no tienen nariz.

Mi idea era usarlo como mordaza, pensó Enrique...

Dos días después Enrique entró en el agujero con un gran paquete envuelto para regalo.

—¿Qué es eso?

—El regalo de tu madre, primor.

Ana Lida miró el objeto con desdén.

—Bien, al menos has traído algo grande, sea lo que fuere. ¿Y qué es?

Enrique desenvolvió el paquete con orgullo.

Ana Lida bajó la cola sorprendida.

—¿Queso?

—El mayor queso del mundo, mi dulzura.

—Enrique, debe de tener un metro por lo menos.

—Oh, claro que no, Ana Lida.

Ana Lida resopló.

—Bien, no me culpes si tienes problemas para despacharlo.

—Despachar queso por correo no es problema —dijo Enrique.

—Son 5 libras —dijo Héctor el gusano empleado de correos. Hizo una pausa y miró cautelosamente el paquete—. Excúseme, ¿qué tamaño tiene esa encomienda?

—¿A qué se refiere con "tamaño"?

—El diámetro, señor. La mayor distancia en una línea recta entre dos puntos cualesquiera, al igual que para dos dimensiones, señor.

—Poco menos de un metro —dijo jovialmente Enrique.

—Permítame medirlo, señor... A mí me da exactamente un metro.

—Oh.

—Lo cual causa lo que en la oficina postal denominamos un problema, señor.

—No me diga. ¡De acuerdo, córtelo en tres partes!

Héctor el empleado cogió el paquete y lo miró desde varios lados.

—No sé si alcanzará con tres piezas, señor.

—Pero acabo de demostrar que tres...

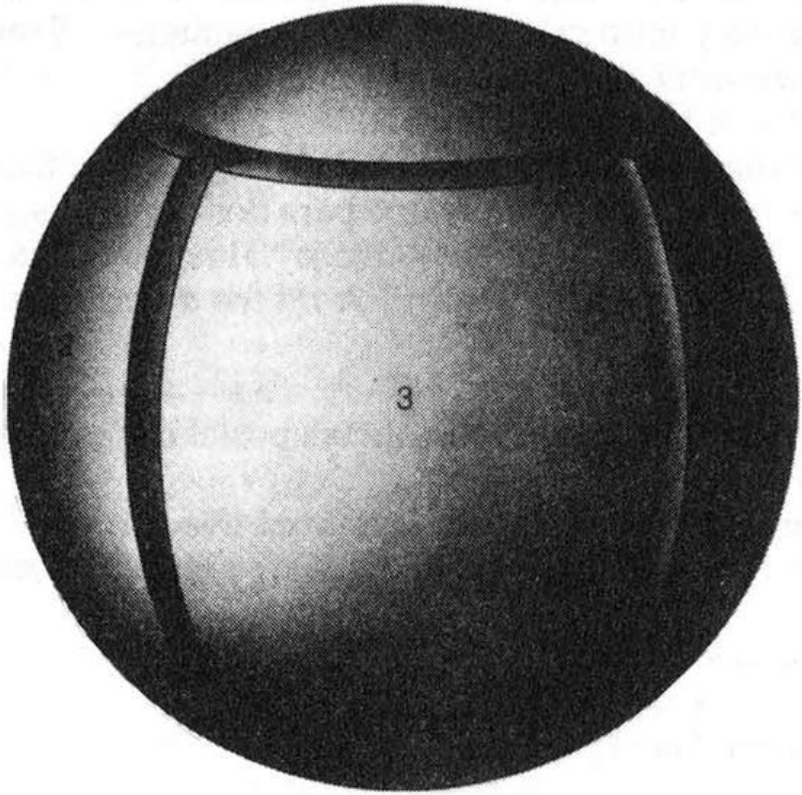
—Sí, señor. Para figuras planas, señor.

—Oh.

—Esta encomienda es lo que en la oficina de correos llamamos un objeto abultado, señor. Un paquete tridimensional, si entiende a qué me refiero.

—Empiezo a ver el problema, sí.

—Ahora bien, si fuera un queso esférico, como un Gouda, por ejemplo, usted no podría cumplir con las normas postales cortándolo en tres partes. *(¿Por qué no?)* Por otra parte, cuatro serían suficientes. (Figura 10.8).



10.8. Cómo cortar una esfera de diámetro unidad en cuatro partes de diámetro inferior a 1.

—Bien, córtelo en cuatro.

—Usted no ha mirado atentamente la figura, señor. No sirve cortarlo en cuatro partes.

—Bien, en ocho. ¡Eso dará resultado! Todo sólido de diámetro de un metro encaja dentro de un cubo unidad. La prueba es similar a la que se aplica en dos dimensiones. Así que si lo cortamos en ocho cubos iguales de mitad del tamaño, los pequeños cubos tendrán un diámetro inferior a 1... *(¿Qué diámetro tendrán?)* Al igual que las piezas del sólido original.

—Excelente, señor. Le costará 40 libras.

—¿Qué? ¡Pero el queso sólo costó 7 libras! Mire, me lo llevaré para ver qué puedo hacer...

Pero las complicaciones de la geometría tridimensional fueron demasiado para Enrique. Así que fue a ver a un amigo suyo, un oscuro empleado de la oficina de patentes llamado Albert Guseinstein, quien parecía tener una mente matemática. Lo encontró de pie frente a una pizarra, escribiendo fórmulas y luego borrándolas con irritación.

—$E = ma^2$... No, ridículo. $E = mb^2$... Mejor, pero no es correcto. $E = m$...

—¡Hola, Albert! Lo lamento, ¿interrumpo algo importante?

—Claro que no, Enrique. Sólo una pequeña idea que no dará resultado... Me alegra verte.

Enrique explicó su problema.

—¡Borsuk! —dijo Albert.

—¡Lo mismo para ti! —replicó Enrique acalorado. Albert tuvo que explicarle que no era un insulto. El problema de Enrique era una cuestión de geometría combinatoria: el ordenamiento de las formas. Fue planteada inicialmente por el matemático polaco K. Borsuk en 1933, y por ello se conoce como el *Problema de Borsuk*. Estaba resuelto, explicó Albert, para cuerpos de dos y tres dimensiones, pero todavía no para cuerpos de cuatro o más dimensiones.

El Problema de Borsuk atiende a la menor cantidad posible de porciones de diámetro estrictamente más pequeño en que se puede dividir cualquier conjunto de diámetro unidad en un espacio n -dimensional. En 1933 Borsuk demostró que, para figuras en el plano, tres porciones son siempre suficientes. Su demostración fue similar a la de Enrique. La conjetura de Enrique, según la cual todo conjunto plano de diámetro 1 se puede rodear con un hexágono regular cuyos lados opuestos estén separados por una distancia 1, fue demostrada por el matemático húngaro J. Pál en 1920. Como Enrique había comprendido, la solución al Problema de Borsuk en el plano se deriva de allí. Para conjuntos en el plano, la respuesta al Problema de Borsuk es que tres porciones siempre bastan.

¿Vale lo mismo para conjuntos en el espacio tridimensional? Borsuk hizo la misma observación que Héctor el gusano del correo: la respuesta es “no”. Una esfera de diámetro 1 no se puede dividir en tres porciones de diámetro inferior a 1. En 1933 conjeturó que cuatro piezas bastan para cualquier conjunto del espacio tridimensional, y más generalmente que $n + 1$ piezas bastan en un espacio n -dimensional. Pero no pudo demostrar sus conjeturas.

El primer progreso fue efectuado en 1955 por H. G. Eggleston, quien demostró que Borsuk tema razón en tres dimensiones. Su demostración, muy larga y dificultosa, fue simplificada en 1957 por Branko Grünbaum, usando un truco similar al hexágono de Pál. En 1953 David Gale había demostrado una analogía tridimensional del Teorema de Pál: todo sólido de diámetro 1 se puede rodear con un octaedro donde las caras opuestas están separadas por una distancia 1. En vez de un hexágono de Pál, Grünbaum usó un octaedro de Gale.

Demostró que si tres puntas del octaedro se cortan como en la

figura 10.9, aún puede contener cualquier cuerpo de diámetro 1. Finalmente halló un modo de cortar el poliedro resultante en cuatro partes, cada cual de diámetro inferior a 1 (figura 10.10). El sólido encerrado también se debe dividir en cuatro (o menos) partes, cada cual de diámetro inferior a 1.

—¿Y cuál es el diámetro?

—La parte más ancha tiene un diámetro

$$\frac{\sqrt{(6129030 - 937419\sqrt{3})}}{(1518\sqrt{2})}$$

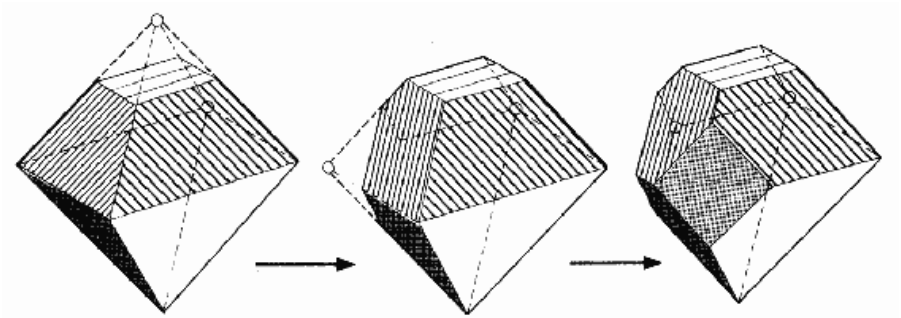
lo cual equivale a 0,9887 aproximadamente.

—Extraño —dijo Enrique, impresionado.

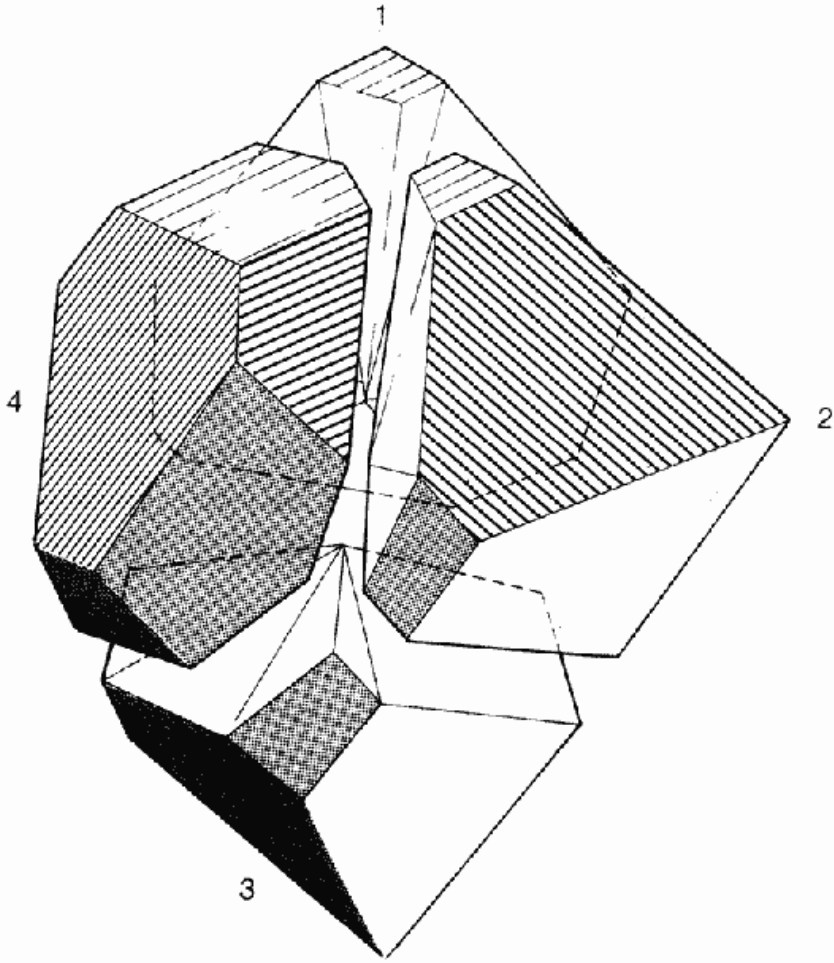
—Sí, la geometría combinatoria es engañosa. Hay muchos problemas que lucen sencillos, pero aún no están resueltos. En un espacio de cuatro o más dimensiones, el Problema de Borsuk aún permanece irresuelto.

—¿De veras?

—Así es. Se sabe que en general se requieren por lo menos $n + 1$ partes, pero no se sabe si sería necesario más que $n + 1$ para dividir un conjunto cuidadosamente escogido de diámetro 1 en partes de diámetro menor. Se sabe que dicho conjunto debe tener puntas agudas: en 1946 H. Hadwiger demostró la Conjetura de Borsuk para conjuntos convexos con contornos lisos.



10.9. Cada sólido de diámetro unidad se puede rodear con un poliedro de Grünbaum, obtenido al cortar partes de un octaedro de Gale (uno cuyas caras opuestas se hallan a 1 unidad de distancia).



10.10. El poliedro de Grünbaum se puede cortar en cuatro partes, cada cual de diámetro inferior a 1.

—¿Así que la Conjetura de Borsuk no está demostrada ni siquiera en cuatro dimensiones? Déjame ver, eso indicaría que cualquier conjunto de diámetro 1 en un espacio tetradimensional se puede dividir en cinco partes, cada cual de diámetro inferior a 1. Hmmm... ¡Es tentador! Apuesto a que podría acercarme...

—Posiblemente —dijo Albert.

—¿Puedes intentar con el mismo argumento que utilicé con el cuadrado y el cubo? ¿Rodear el cubo con un hipercubo unidad y cortarlo en dieciséis piezas de la mitad de ese tamaño?

—No, Enrique, ese método ya no funciona. Pensar en el espacio tetradimensional no es fácil. *(¿Por qué no funciona el método? Use el hecho de que la "hiperdiagonal" de un "hipercuboide" tetradimensional de lados* a,b,c,d *está dada por* $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$, *generalizando el*

teorema de Pitágoras.) Al cortar un hipercubo unidad en tercios puedes mostrar que ochenta y una piezas son suficientes. Pero es demasiado grande.

—¿Hay resultados generales que funcionen para todas las dimensiones? —preguntó Enrique.

—Ya lo creo —dijo Albert Guseinstein, cabeceando vigorosamente —. L. Danzer demostró que en *n* dimensiones se requieren

$$\sqrt{\frac{(n+2)^3}{3}\times(2+\sqrt{2})}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]}$$

Eso llega a cincuenta y cinco{2} cuando n = 4. Pero sin duda tú lograrás algo mejor en el caso tetradimensional. *(¿Podrá usted?)* — Déjame pensarlo... De cualquier modo, Albert, gracias por tu ayuda.

—No fue nada. ¿En dónde estaba yo?

—Eh... Creo que $E = md^2$.

—Gracias. Bien, cualquiera nota que eso no sirve. Probemos con $E = me^2$... No, no, terrible, terrible. ¿Sabes? Antes de tu llegada pensé que estaba por dar en la tecla, pero ahora tengo la impresión de olvidar algo importante...

Soluciones

1. No se puede dividir un cuadrado unidad en tres piezas de diámetro inferior a 1, porque al menos dos de las cuatro esquinas deben pertenecer a la misma pieza, y están a una distancia de 1 unidad o más.

2. Las tres partes del hexágono tienen diámetro $(\sqrt{3})/2 = 0{,}8660....$

3. Si usted divide una esfera en tres partes al menos una de ellas debe contener dos puntos diametralmente opuestos. La demostración es muy larga, pero no requiere conocimiento técnico. Véase V. Boltjansky e I. Gohberg, *Results and Problems in Combinatorial Geometry,* pág. 10.

4. Cada cubo de mitad del tamaño tiene diámetro

$$\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2+(1/2)^2}=\sqrt{(3/4)}=\sqrt{3}/2=0{,}8660\ldots$$

5. El método de Enrique de dividir los cubos en dos falla en cuatro dimensiones porque la diagonal de un hipercubo dividido en dos es

$$\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2+(1/2)^2+(1/2)^2}=1$$

6. Corte el hipercubo por la mitad en tres direcciones pero en tres partes iguales a lo largo de la cuarta. Esto arroja veinticuatro hipercuboides más pequeños, cada cual con diámetro $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/3)^2} = \sqrt{(31/36)} = 0{,}9279\ldots$

¡Pero quizás usted pueda mejorar ese resultado!

Otras lecturas

V. Boltjansky e I. Gohberg: *Results and Problems in Combinatorial Geometry,* Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

K. Borsuk: "Drei Sätze über die *n*-dimensionale Spháre", *Fundamenta mathematicae,* 20 (1933), págs. 177-90.

H. G. Eggleston: *Convexity,* Cambridge, Cambridge University Press, 1955.

Branko Grünbaum: "A Simple Proof of Borsuk's Conjecture in Three Dimensions", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 53 (1957), págs. 776-8.

I. Yaglom y V. Boltjansky: *Convex Sets*, Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1961.

11. Todas las paralelas llevan a Roma

La ciudad que inventó los edificios de apartamentos tiene un insoluble escasez de viviendas.

La ciudad que inventó las cloacas públicas no tiene un sistema cloacal adecuado.

La ciudad que en el 45 a.C. prohibió los carruajes en el centro durante las horas diurnas tiene un tráfico cuya velocidad promedio es de 6 km por hora. Hay tres coches por cada metro de camino.

Es una ciudad ruidosa, mugrienta y muy endeudada. Además, es una de las más bellas del mundo. Una paradoja viviente. Con razón una superficie de una sola cara recibe su nombre.

No, no hay una ciudad llamada Moebius. Esto es Roma. Y estando

en Roma...

Nos sentábamos a una mesa de la Via Vittorio Véneto, que serpea colina abajo desde los jardines de la Villa Borghese hasta ingresar en la Piazza Barberini. Una vacía botella de Chianti se erguía entre los restos de la pasta que habíamos comido. Otra botella, medio llena, se erguía al lado.

—Por suerte el chianti no viene en botellas de Klein —dije.

—Sé que *klein* significa "pequeño" en alemán —dijo Enrico—, y convengo en que es una suerte que el chianti no venga en botellas pequeñas... ¿Pero por qué de pronto hablas en alemán?

—No. No era eso. Fue una broma de matemático. Una botella de Klein es igual por dentro y por fuera.

—Ahorraríamos en corchos —dijo Elena.

—No, siempre gotearía —dijo Enrico. Eran Enrico y Elena Macaroni. Él dirige una galería de arte, y ella lo dirige a él.

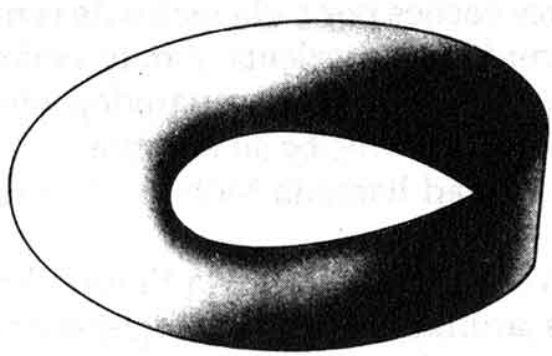
—¿Cómo puede el interior de una botella ser igual al exterior? —preguntó Elena con seriedad.

—Es una historia complicada —dije—. Lo cierto es que no tiene un interior y un exterior... Y no es una botella.

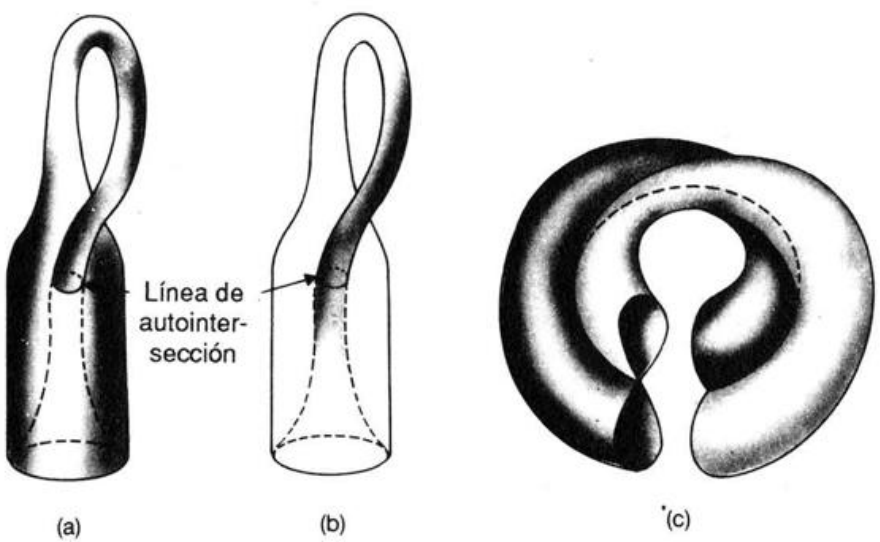
—Eso explica muchas cosas.

—¿Quién era Klein? —preguntó Enrico.

—Félix Klein fue uno de los más grandes matemáticos de Alemania —dije—. Fue la segunda persona que inventó una superficie de un solo lado. El primero fue August Moebius. —Cogí una servilleta de papel, arranqué una franja angosta y la torcí uniendo los extremos—. He aquí una cinta de Moebius (figura 11.1). Pero la cinta de Moebius tiene un borde. La botella de Klein, inventada en 1882, no tiene bordes. Es una superficie cerrada. (Figura 11.2 [a]).



11.1. La cinta de Moebius.



11.2. Tres vistas de la botella de Klein, (a) Inserta en el espacio tridimensional, (b) Inserta en el espacio tetradimensional, con la cuarta dimensión ilustrada por la profundidad del sombreado. La autointersección del espacio tridimensional no se produce en el espacio tetradimensional (a pesar del modo en que luce la figura cuando se proyecta en el espacio tridimensional, como aquí): las posiciones de las dos láminas de superficie en la cuarta dimensión (es decir, sus sombras) son diferentes en la aparente intersección, (c) Una forma menos conocida de la botella de Klein obtenida mediante la unión de una figura 8 consigo misma, mediante una pequeña torcedura. El sombreado distingue los dos lóbulos de la figura 8.

—¿Y tiene un solo lado?

—Imagínate tratando de pintar la superficie. Empiezas por lo que parece el exterior y sigues pintando el tubo. Pero se curva, pasa a través de sí misma y luego dobla hacia afuera. En ese punto descubres que estás pintando lo que creías era el interior. La superficie tiene un solo lado: todo se une.

—Pero eso es porque pasa a través de sí misma —dijo Elena.

—No, es porque se vuelve de adentro afuera y luego se une. Admito que tiene que pasar a través de sí misma si quieres hacer un modelo en el espacio tridimensional. En el espacio tetradimensional no se cruza consigo misma, y aún tiene un solo lado. Desde luego hay que aprender a pensar en cuatro dimensiones para verlo ([Figura 11.2 [b]).

—Oh.

—Otro modo de obtener una botella de Klein consiste en tomar una figura 8, moverla alrededor de un círculo y torcerla a medias [figura 11.2(c)]. Pero eso no parece tener forma de botella. En realidad, tengo mi propia teoría sobre el nombre *botella de Klein.* Creo que originalmente fue *superficie de Klein.* En tiempos de Klein había toda una industria en que matemáticos alemanes inventaban nuevas

superficies y les daban su propio nombre. La superficie de Kummer y la superficie de Steiner, por ejemplo, originalmente Kummersche Flache y Steinersche Flache, pues el "sche" es un sufijo posesivo y "Flache" significa superficie en alemán. Así que tal vez el nombre original fue *Kleinsche Flache,* "superficie de Klein". Pero luce como una botella, y en alemán botella es *Flasche,* así que...

—¡Un estudiante la llamó *Kleinsche Flasche*! —exclamó Elena—. ¡La "botella de Klein"! ¡Un retruécano alemán!

—Exacto. O quizá se tradujo mal. Sé que en el famoso libro *Anschauliche Geometrie* , de Hilbert y Cohn-Vossen, los autores aluden a la "superficie de Klein, también llamada botella de Klein". Quizá Hilbert inventó el retruécano.

—Fascinante —dijo Enrico—. Pero no muy relevante para el mundo real.

—No estés tan seguro —dije—. Tú eres un experto en arte, ¿verdad?

—Sabes que sí.

—Italia es famosa por sus bellas pinturas. Masaccio, Canaletto, Gozzoli, Veneziano, della Francesca. Maravillosa perspectiva, ¿verdad?

—La perspectiva se inventó en Italia.

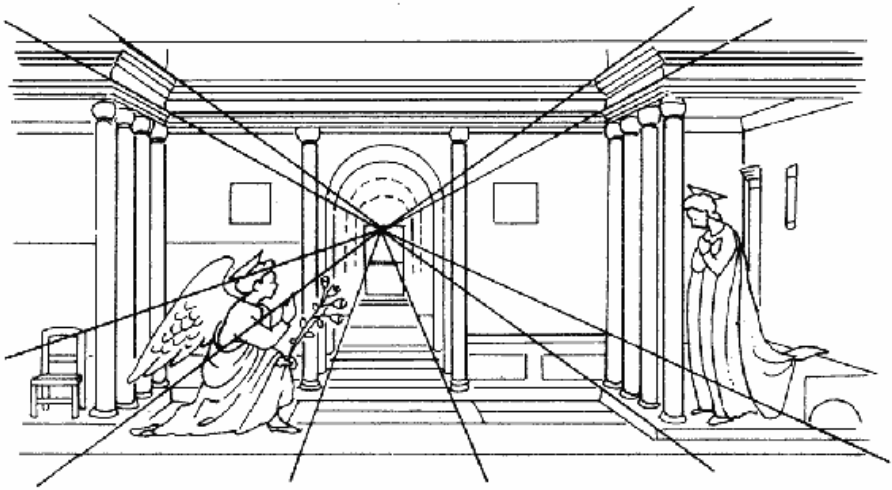
—El *dibujo* en perspectiva se inventó en Italia. La idea básica fue descubierta por Brunelleschi en 1420. Y la geometría de la perspectiva fue publicada por otro italiano, Alberti, en 1436, en su libro *Della pittura.* Se llama geometría proyectiva, y describe el modo en que los ojos ven el mundo. La superficie básica se conoce como plano proyectivo. En el plano proyectivo no hay paralelas: dos líneas cualesquiera se cortan en un punto. (Figura 11.3)

—Descabellado.

—Más aun, como Klein demostró en 1874, el plano proyectivo tiene un solo lado.

—No es tan bueno para la pintura, entonces —dijo Enrico.

—No, te equivocas. ¡Puedes obtener una pintura del doble del tamaño en el mismo tamaño de lienzo! —señaló Elena.



11.3. La Anunciación de Domenico Veneziano, quien floreció en 1438-61. Los bordes de las paredes, en realidad paralelos, aparentan cruzarse "en el infinito".

Curiosamente, el plano proyectivo se inventó mucho antes que la botella de Klein; pero es virtualmente desconocido en los círculos matemáticos, mientras que la botella de Klein es famosa. Debajo examinaremos algunas de las posibles razones; pero primero tenemos que familiarizamos con el plano proyectivo.

En la geometría común, hay una línea singular que une dos puntos cualesquiera. La mayoría de los pares de líneas se cruzan en un punto singular, pero algunas —las paralelas— no lo hacen. Pero, desde el punto de vista correcto...

Conduje a Enrico y Elena desde la Via Vittorio Véneto hasta la cercana Via XX Settembre, parte de una larga calle recta que recorre casi 4 km desde el centro de Roma hacia los suburbios.

—¿Qué veis? —les pregunté.

—Tráfico. Atascado como de costumbre.

—No, me refiero a algo geométrico.

—Nada especial.

—Los dos bordes del camino son un par de paralelas. Las paralelas no se cortan. Miradlas: ¿dan la impresión de no cortarse?

Enrico y Elena me complacieron mirando la larga y recta calle.

—Parecen cortarse —dijo Elena.

—En el horizonte —dijo Enrico.

—Precisamente —dije—. Cuando miramos las paralelas, parecen cortarse. En la geometría del sistema visual, las paralelas no existen. Así que necesitamos una nueva clase de geometría, en la cual dos líneas cualesquiera se corten.

"¿A qué distancia está el punto del horizonte donde los dos lados

del camino se cortarían... si lo extendieran lo suficiente?

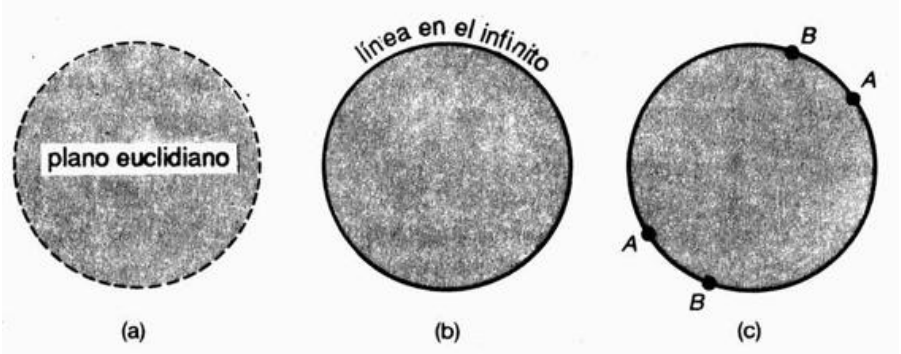
—Oh, unos 50 kilómetros —dijo Elena.

—En una Tierra esférica, sí. ¿Pero en un plano?

—Bien... en el borde.

—Hay un largo camino hasta el borde de un plano —dijo Enrico.

—Infinitamente largo —dije—. El lugar donde las paralelas parecen cortarse está en el infinito. En el plano euclidiano habitual, la infinitud no existe. Puedes ir tan lejos como gustes, pero no puedes llegar hasta la infinitud. Pero en la geometría proyectiva, sí puedes. Para lograr esto tienes que añadir puntos "ideales" en la "infinitud" del plano (figura 11.4). Los puntos del "infinito" forman una Enea adicional, así que también debes añadirla. Así obtienes un plano un poco más grande, por así decirlo, en el cual dos puntos cualesquiera están unidos por una línea singular, y dos líneas cualesquiera se cortan en un punto singular.



11.4. El plano euclidiano (a) más una línea en el infinito (b) forma el plano proyectivo, siempre que convengamos (c) en que pares opuestos de puntos en el contorno, tales como AA o BB, representan el mismo punto del plano proyectivo.

—Pero las paralelas se cortan en dos puntos —dijo Elena—. Uno en un extremo, otro en el otro.

—Pero sería bueno que se cortaran sólo en uno, ¿verdad? Más bonito. Más simétrico y elegante. Más parecido a las líneas reales.

—Sí —dijo ella dubitativamente.

—Así que tenemos que fingir que los dos puntos en extremos opuestos de un par de líneas paralelas son iguales —dije.

—Eso es tonto.

—No tan tonto como parece. ¿Alguna vez visitaste el infinito para verlo por ti mismo?

—No.

—Matemáticamente, el infinito es sólo un concepto abstracto, de modo que podemos atribuirle las propiedades que queramos. Yo deseo que las líneas se corten en un solo punto. Así que insisto en que los "dos" puntos del infinito, en cada extremo de un par de paralelas, sean

considerados como el mismo. Puede parecer raro, pero funciona. Es como curvar las líneas alrededor del círculo... excepto que permanecen derechas.

—Claro como el lodo.

—Bien. Así obtenemos nuestro primer modelo del plano proyectivo: es el plano habitual, más una "línea" en el infinito, más la regla de que los extremos opuestos de pares de paralelas se cortan con la *"línea"* en el infinito, en el mismo punto. (Figura 11.5)

—Me cuesta visualizarlo.

—Por el contrario, Elena. Así es como funciona tu sistema visual.

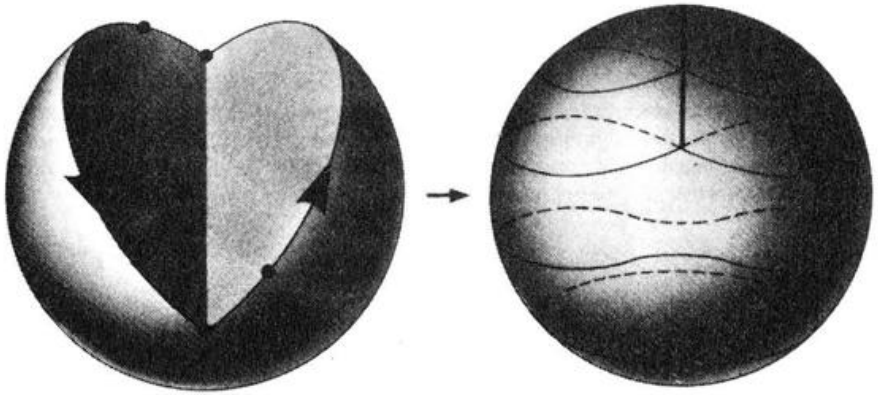
11.5 Mirando al sur una línea ferroviaria recta vemos dos paralelas cortándose en el infinito. Mirando al norte, vemos que se cruzan de nuevo. Como dos líneas tendrían que cruzarse en un punto singular, debemos considerar idénticos estos dos puntos "opuestos" del infinito.

—Bien, me cuesta metérmelo en la cabeza. Y no me queda claro por qué el plano proyectivo tiene un solo lado, como tú dices. El plano común tiene dos lados: anverso y reverso.

—Sí, pero la superficie de arriba y la de abajo se unen en el infinito, dada la regla acerca de que los puntos extremos de las paralelas son las mismas.

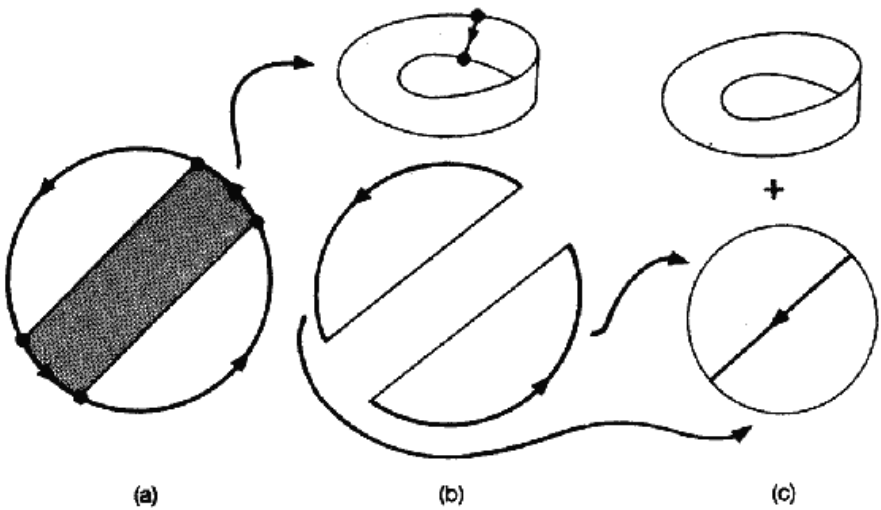
Hay varios modos de "ver" la forma del plano proyectivo, y algunos vuelven más claro que tiene un solo lado. Quizá lo más simple sea adoptar el punto de vista del topólogo. Para el topólogo, todo el plano infinito se puede comprimir dentro de un disco circular (figura 11.4[a]), menos su contorno, desde luego. Luego los "puntos del infinito" adicionales se pueden añadir pegando también el contorno (figura 11.4[b]). Luce circular, pero eso no es problema para el topólogo. Para atenernos a la regla concerniente a la identidad de los extremos opuestos, tenemos que "pegar" (mentalmente) los puntos opuestos del contorno (figura 11.4[c]). Si tratamos de curvar el disco

en el espacio tridimensional, para que esto ocurra, tendremos que hacerlo pasar a través de sí mismo (figura 11.6). La mitad superior de la figura se llama *casquete transversal.*



11.6. Si intentamos identificar puntos opuestos en la Figura 11.4(c) curvando físicamente el plano, es preciso que la superficie resultante pase a través de sí misma, formando un casquete transversal. A lo largo de la autointersección, los dos "lados" del plano se unen para crear una superficie de un solo lado. El punto superior es singular*: la superficie que está cerca no puede ser deformada continuamente para formar uno o más discos individuales.*

El casquete transversal se corta a sí mismo a lo largo de una línea. Tal como en la botella de Klein, esta línea de autointersección es un artefacto causado por el modo en que dibujamos la superficie en el espacio tridimensional. Matemáticamente, no tiene existencia "real". Pero visualizarla es una ayuda. Para liberarnos de ella, deberíamos pensar en un disco cuyos puntos opuestos del contorno se identifican mentalmente, en vez de curvar el disco para unirlos.



11.7. Una franja (sombreada) que atraviesa el plano proyectivo (a) forma una cinta de Moebius (b) porque los puntos opuestos del contorno se identifican. Adecuadamente

deformadas, las dos partes restantes se unen para formar un disco (c). En abstracto, podemos formar un plano cosiendo una cinta de Moebius y un disco a lo largo de los bordes.

Podemos ver que esta versión del plano proyectivo tiene un solo lado. Si empezamos a pintar el "exterior" y cruzamos la línea de autointersección, terminamos en el "interior". Podemos verlo de otra manera. Si cortamos una franja que cruce el disco (figura 11.7), podemos pegar los extremos para obtener una cinta de Moebius (figura 11.7[b]). Así que el interior y el exterior se unen en esta parte del plano proyectivo. Podemos ver que un plano proyectivo es sólo una cinta de Moebius con un disco cosido a lo largo del borde (figura 11.7[c]).

—Es un poco antinatural —dijo Enrico.

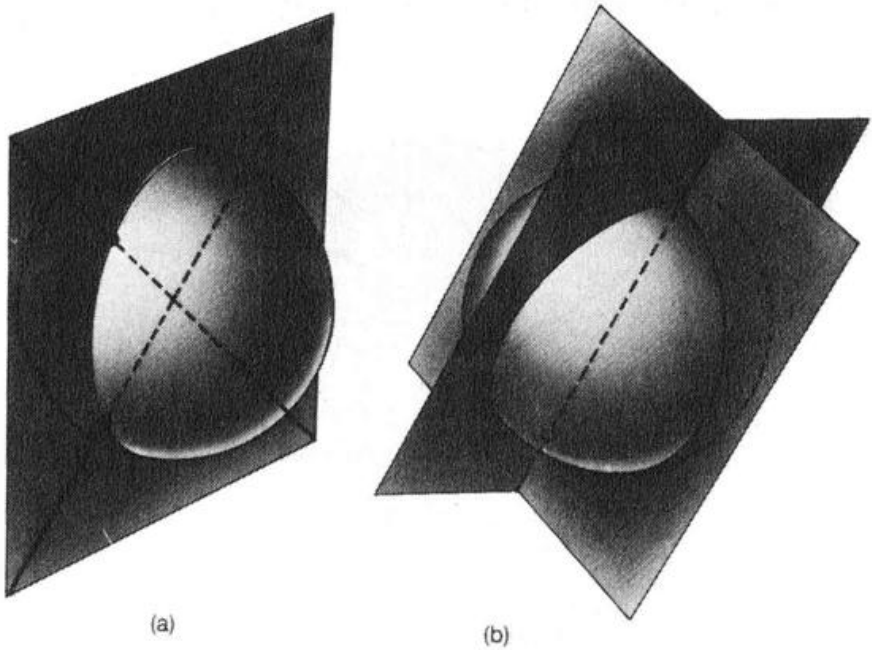
—De acuerdo —respondí—. Tu sentido de la elegancia artística funciona muy bien. Pero hay otro modelo del plano proyectivo que es geométrico y natural. Desde luego, tiene sus propias peculiaridades.

—Desde luego.

—La idea es incrementar en uno la dimensión de todo. Cuando yo digo "punto" debes pensar en "línea a través del origen", en el espacio tridimensional común. Cuando digo "línea", debes pensar "plano a través del origen". Cuando digo "dos puntos se encuentran en una línea", debes pensar "dos líneas se encuentran en un plano". ¿De acuerdo?

—*Si* te divierte.

—Bien, la esencia abstracta de la geometría es el modo en que las "líneas" y "puntos" se relacionan entre sí, no la forma que cobran. Los nombres son sólo etiquetas útiles. Aquí es útil modificar las etiquetas para volver más claras las relaciones. En esta versión "fortalecida" de la geometría, dos "puntos" cualesquiera se hallan en una "línea" singular. Es decir, dos líneas cualesquiera a través del origen se hallan en un plano singular (figura 11.8[a]). ¿De acuerdo?



11.8 En el espacio tridimensional común, dos líneas a través del origen determinan un plano único (a) y dos planos a través del origen determinan una línea única (b). Cada línea corta la esfera (sombreada) en un par de puntos opuestos; cada plano la corta en un círculo grande. El plano proyectivo se puede interpretar así como la geometría de líneas y planos a través del origen en el espacio tridimensional, o bien como la de pares de puntos y grandes círculos de una esfera.

—Por cierto.

—Pero además, dos "líneas" cualesquiera se encuentran en un "punto" singular. Es decir, dos planos cualesquiera a través del origen se cruzan en una línea (figura 11.8[b]). Así que tenemos exactamente las propiedades requeridas en la geometría proyectiva. El plano proyectivo es sólo espacio tridimensional, pero "punto" y 'línea" cobran un significado nuevo. Geométrico, y natural.

—¿Natural?

—Natural para un matemático.

—¿Pero cómo puedes llamar plano al espacio tridimensional? —preguntó Elena.

—Porque hemos incrementado en uno todas las dimensiones —le recordé—. Si una "línea" es un plano a través del origen, un "plano" tiene que corresponder a un objeto tridimensional... que debe ser el espacio entero.

"No sólo eso: puedes demostrar que esta nueva versión del plano proyectivo es sólo el original disfrazado.

—¿Cómo? No luce así para mí.

—Es un disfraz bastante grueso. Imagina una esfera centrada en el

origen. Ella corta cada “punto” del plano proyectivo (es decir, cada línea del centro) en un par de puntos opuestos. Corta cada “línea” (cada plano a través del centro) en un gran círculo. Así que la geometría del plano proyectivo es sólo la geometría de la esfera, con “punto” interpretado como un par de puntos en las antípodas, y “línea” interpretada como un gran círculo.

—Bien. Pero tenemos pares de puntos, no puntos individuales.

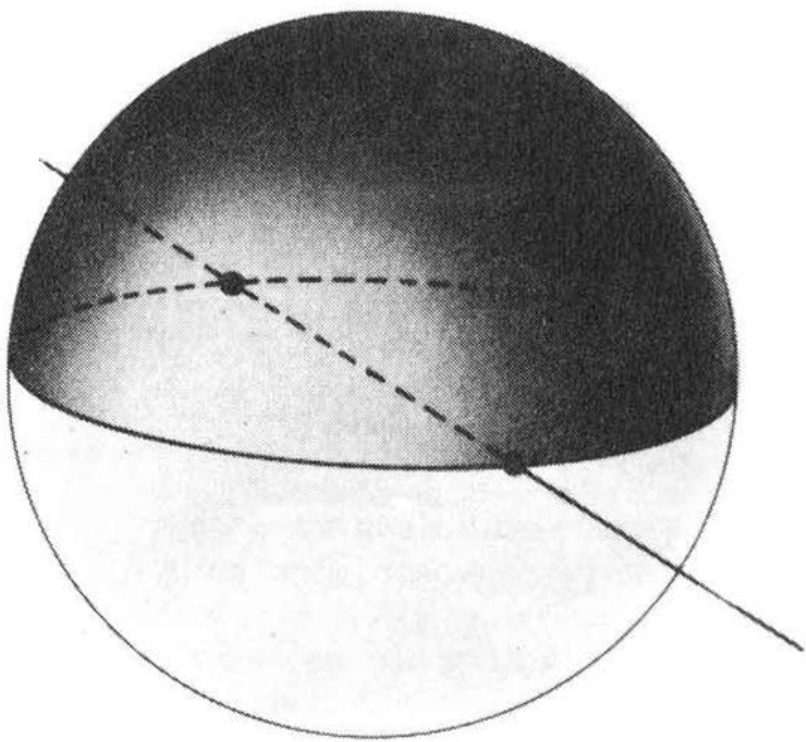
—Eso no importa en lo abstracto. Pero podemos superarlo pensando sólo en una semiesfera o hemisferio. Eso reduce la mayoría de los pares a meros puntos.

—Excepto los puntos del contorno del hemisferio.

—¡Precisamente, Enrico! ¡Bien hecho! Así que tenemos que identificar los puntos opuestos del contorno del hemisferio (figura 11.9). Así como nuestro primer modelo del plano proyectivo identificaba a los puntos opuestos en el contorno de un disco.

“Y, topológicamente hablando, un hemisferio es un disco, sólo que se curvó un poco. Así que el nuevo modelo es el viejo disfrazado.”

—¡Bravo! —aplaudieron. Sospeché cierta ironía, pero les seguí el juego e hice una reverencia.



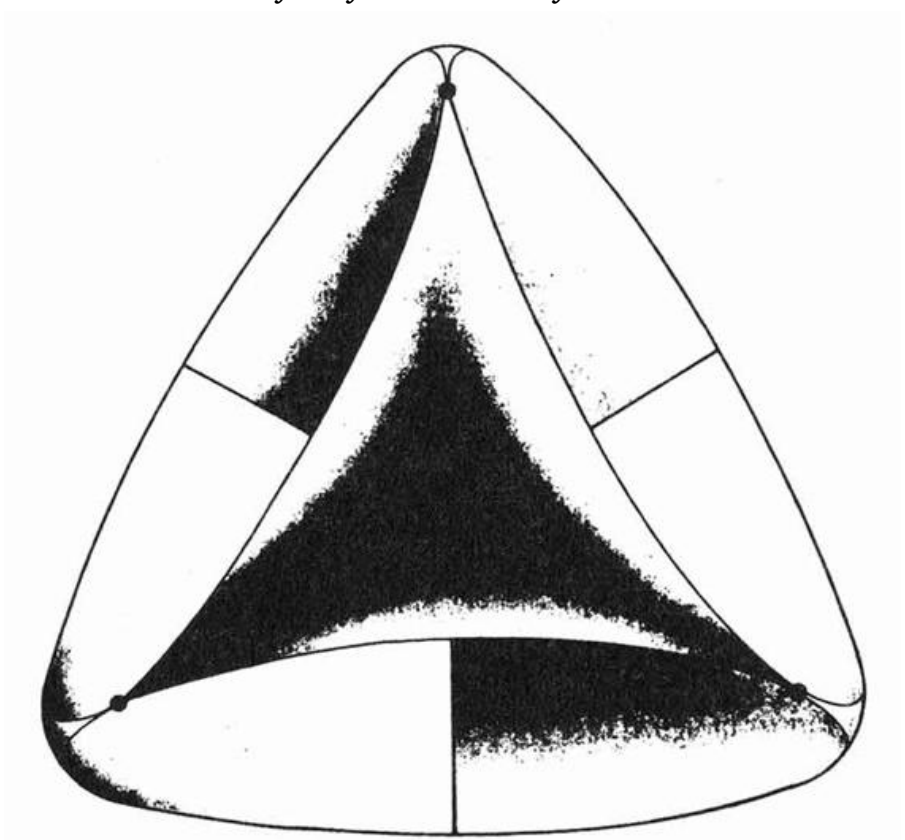
11.9. Para obtener puntos individuales en vez de pares de puntos podemos restringir la atención a un hemisferio, obteniendo una geometría de puntos y grandes semicírculos. Pero los puntos opuestos del contorno aún se deben identificar. Esta versión del plano

proyectivo es pues una distorsión topológica de la figura 11.4.

—¡Bis! —exclamó la entusiasmada Elena. Enrico trató de acallarla pero el daño ya estaba hecho. Inicié mi bis.

—Hay muchos modos de visualizar el plano proyectivo —dije—. Docenas. —Enrico gruñó—. Una de ellas fue descubierta por Jacob Steiner, en cierto modo. Era el año 1844, y por coincidencia él visitaba Roma, así que lo llamó *superficie romana* (figura 11.10). Es uno de los pocos objetos matemáticos que llevan el nombre de un lugar. De hecho, lo construyó de modo muy complicado usando geometría pura. Ahora bien, usando coordenadas, cada superficie está determinada por alguna ecuación. Por ejemplo, una esfera de radio 1 centrada en el origen tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en las coordenadas (x,y,z). Steiner era excelente en geometría pero pésimo en álgebra, y no pudo resolver la ecuación de esta superficie. Un año antes de morir Steiner pidió a Karl Weierstrass que resolviera la ecuación. Weierstrass, un matemático mucho más versátil que Steiner, halló la ecuación sin inconvenientes:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0.$$



11.10 La superficie romana de Steiner: seis casquetes transversales unidos. Tiene la misma

simetría que un tetraedro.

Es bellamente simétrica, igual que la superficie.

Enrico y Elena admiraron la elegante simetría de la superficie de su ciudad natal.

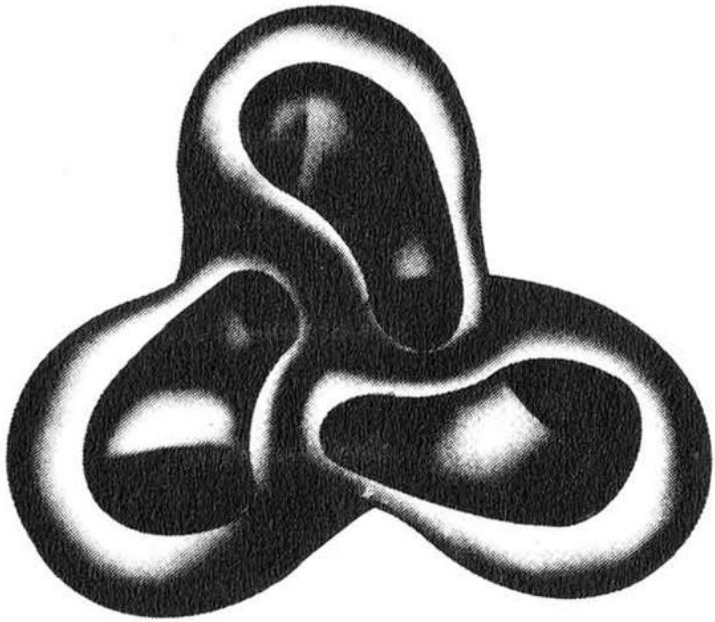
—La botella de Klein también tiene una ecuación —dije—. Está formada por los puntos (x,y,z) de tal modo que

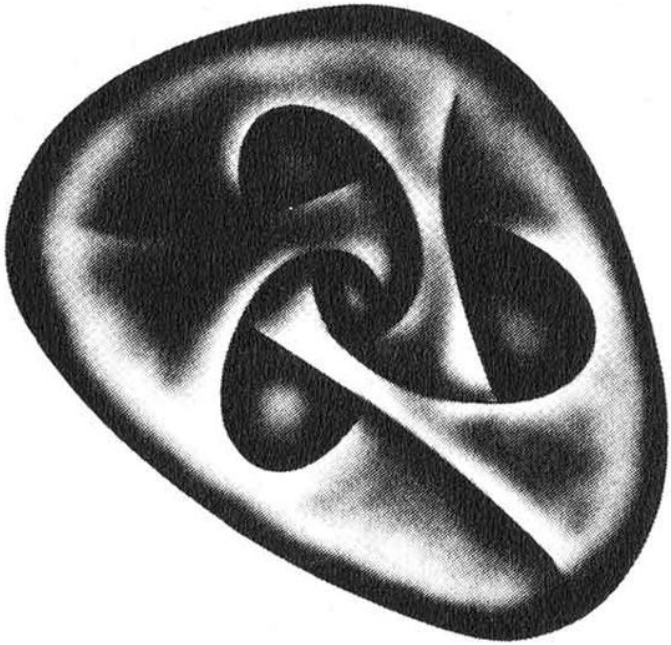
$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 1)\,[(x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1)^2 - 8z^2] + \\ + 16xz\,(x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1) = 0$$

No es tan simétrica, pero tampoco lo es la superficie.

"La superficie romana es sólo un plano proyectivo con un nuevo disfraz. Pero tiene un defecto. —Ambos menearon la cabeza, horrorizados ante esta novedad—. Como el casquete transversal, tiene varios puntos singulares. Son sitios donde no sólo se corta a sí misma en dos o más láminas, sino que las láminas se enredan y se funden. Como la parte superior del casquete transversal. La botella de Klein, por otra parte, no tiene puntos singulares. Se cruza a sí misma, pero en láminas claramente definidas. Tal vez por eso la mayoría de la gente no advierte que en realidad el plano proyectivo es un ejemplo más simple de una superficie de una sola cara. Es mucho más fácil dibujar una botella de Klein convincente.

—También es un nombre más llamativo. Alguien hizo un buen trabajo de relaciones públicas.



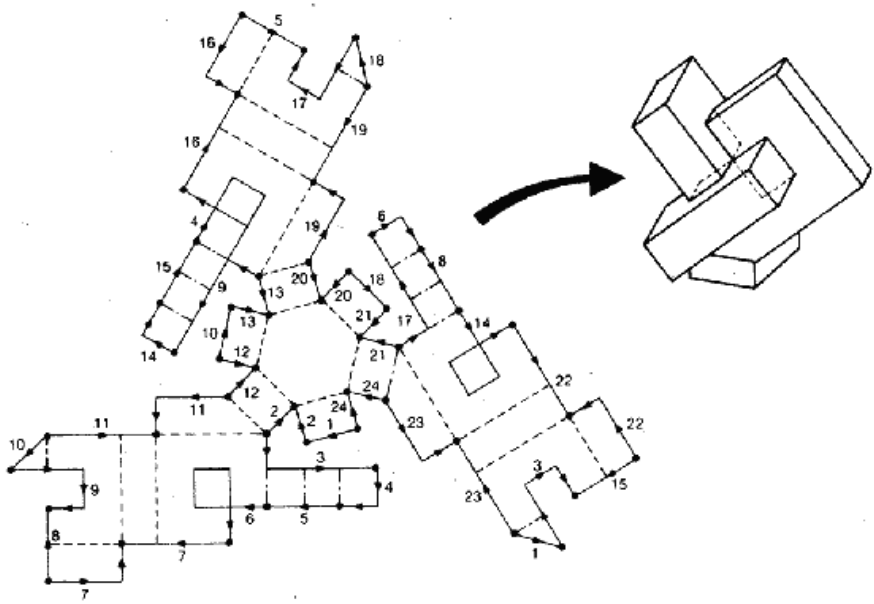


11.11. La superficie de Boy, topológicamente equivalente al plano proyectivo y sin puntos singulares. Hilbert conjeturó que dicha superficie no existía. Las autointersecciones (líneas sólidas) forman un "ramillete" de tres rizos unidos en un punto común. Estas dos instas tan diferentes son topológicamente equivalentes. En ambas se han cortado secciones de la superficie para revelar el interior.

—Quizá. Por mucho tiempo pensé que no se había resuelto si el plano proyectivo se podía disponer en el espacio tridimensional de modo que no tuviera puntos singulares, sólo autointersecciones. David Hilbert, uno de los mayores matemáticos que jamás vivió, conjeturó que no se puede hacer, y pidió a su estudiante Werner Boy que lo demostrara. Boy, como buen estudiante de investigación, siguió su propio instinto y demostró que la conjetura de Hilbert era *errónea*, creando lo que hoy se llama *superficie de Boy* (figura 11.11). Otra encarnación del plano proyectivo.

—Luce rara —dijo Elena.

—Sí. Es como tres rosquillas pegadas, pero la masa de cada rosquilla entra en el orificio de la siguiente. Hay un modelo poliédrico de la superficie de Boy, que se puede fabricar con cartón (figura 11.12). Tal vez eso os dé una mejor idea de la forma.



11.12. Para realizar un modelo poliédrico de la superficie de Boy, recorte esta forma de un cartón delgado y una los bordes que tienen el mismo número.

—¿La superficie de Boy también tiene una bonita ecuación, como la de Steiner? —preguntó Elena. Me pareció una pregunta muy inteligente, y se lo dije.

—Quizás ésa sea la mayor curiosidad de todas —dije—. Hasta hace muy poco, nadie conocía la respuesta. Podían dibujar la superficie, podían estudiar su topología, pero no podían decidir si tenía una ecuación de varios términos, bonita o no. En 1978 Bernard Morin, un geómetra francés que, dicho sea de paso, era ciego, halló ecuaciones para un plano proyectivo sin singularidades pero nadie pudo demostrar que fuera el mismo que el de la superficie de Boy. En 1985 J. F. Hughes halló una fórmula empírica usando polinomios de grado 8. Pero ambas fórmulas son *parametrizaciones,* es decir, en vez de una ecuación "algo en $x,y,z = 0$", cobran la forma "x, y y z = a ciertas expresiones de algunas otras variables". En principio se pueden eliminar las nuevas variables y obtener una ecuación muy complicada en x, y y z, pero no creo que nadie lo haya hecho.

"En 1986 François Apéry encontró una ecuación explícita para la superficie de Boy (recuadro 11.1), un polinomio de grado 6. Derivaba de la deformación de la superficie romana de Steiner para liberarse de sus singularidades. Parece un truco sencillo, pero nadie había podido efectuarlo antes.

Recuadro 11.1

Ecuación de François Apéry para la superficie de Boy

$$64\,(1-z)^3z^3 - 48\,(1-z)^2\,z^2\,(3x^2 + 3y^2 + 2z^2) +$$
$$12(1-z)\,z\,[27(x^2 + y^2)^2 - 24z^2\,(x^2 + y^2) + 36\,2yz\,(y^2 - 3x^2)$$
$$+ 4z^4] + (9x^2 + 9y^2 - 2z^2)\,[-81\,(x^2 + y^2)^2 - 72z^2(x^2 + y^2)$$
$$+ 108\,2xz(x^2 - 3y^2) + 4z^4] = 0$$

—Asombroso —dijo Enrico.

—Hay mucho más —dije—. Si tenéis tiempo, puedo contaros cómo la superficie de Boy resultó ser una esfera metida de adentro hacia afuera. La historia se relaciona con Morin, y un físico francés llamado Jean-Pierre Petit, lo cual es una coincidencia, considerando que *klein* significa pequeño en alemán, al igual que *petit* en...

Pero mi público se alejaba por la Via XX Settembre, encaminándose deprisa y con determinación hacia el punto de infinitud...

La próxima vez que los vea, les hablaré de los planos proyectivos *finitos.*

Otras lecturas

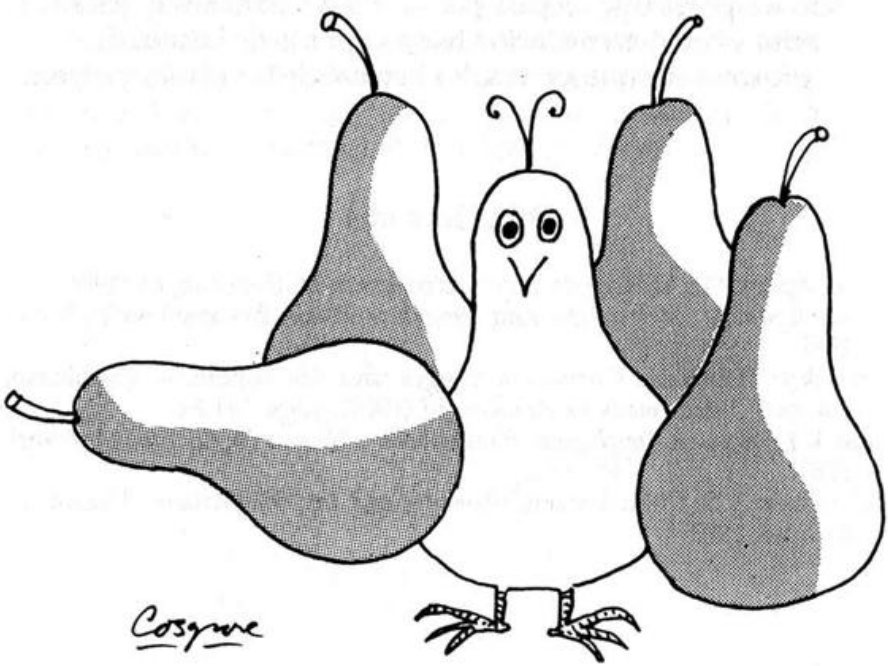
François Apéry: "La Surface de Boy", *Advances in Mathematics,* 61 (1986). Frangois Apéry: *Models of the Rail Projective Plane,* Braunschweig, Vieweg, 1987.

Werner Boy: "Über die Curvatura integra und die Topología geschlossener Flachen", *Mathematische Annalen,* 57 (1903), págs. 151-84.

George K. Francis: *A Topological Picture-book*, Nueva York, Springer-Verlag, 1987.

David Hilbert y S. Cohn-Vossen: *Geometry and the Imagination*, Nueva York, Chelsea, 1983.

12. Los doce juegos de Navidad



Era la tarde de Navidad en la mansión Baffleham. Hacía rato que habían trinchado el pavo y devorado el budín navideño. Lord Roderick de Baffleham y sus once huéspedes estaban de ánimo cordial, cantando las canciones tradicionales.

Tres gallinas francesas,
dos tórtolas,
y una perdiz en un peral.

La vigorosa interpretación compensaba las imperfecciones tonales y el acento de clase alta.

—¡Oh! Eso es muy *curieux* —exclamó la Comtesse de Malfamée—.

Nunca la oí como canción de Navidad, pero en la *belle France* tenemos una canción tradicional parecida, acerca de los meses del año...

Au premier mois de l'année,
Que donn'rai-je à ma mie?
Une perdriole,
Que va, que vient, que vole
Une perdriole
Que vole dans le vent.

"Y termina con:

Au douzième mois de l'année,
Que donn'rai-je à ma mie?
Douze cantatrices,
Onze violons,
Dix pigeons blancs,
Neuf bœufs cornus,
Huit moutons tondus,
Sept chevaux volants,
Six lièvres aux champs,
Cinq lapins courant par terre,
Quatre canards volant en l'air,
Trois tonneaux de bois,
Deux tourterelles,
Une perdriole,
Que va, que vient, que vole,
Une perdriole
Que vole dans le vent.

Los demás aplaudieron con entusiasmo, y la condesa hizo una pequeña reverencia.

—Llamamos a esta canción *La Perdriole.*

—Entiendo que una *perdriole* es una perdiz —dijo el duque de Balmuddle.

—*Mais oui* —dijo la condesa.

—Pero no hay peral. Que extraordinariamente raro —gorjeó el segundo hijo del duque, Edmund—. Tiene que haber alguna relación... —Cogió un ejemplar del *Oxford English Dictionary*—. La voz inglesa *partridge* proviene del inglés medieval *pertrich, patrich...* que procede del antiguo francés *perdriz, pertris...* ¡Vaya! ¡Eso se parece a *pear-tree,* "peral"! Mira, padre... Perdiz en francés antiguo se pronuncia como peral en inglés.

—Parece que alguien confundió las palabras —declaró lady

Chattermere—. Por lo que recuerdo, hay cierta controversia sobre esos "pájaros que trinan" de la canción. ... Algunos dicen que los *calling birds* eran *colly birds,* sean lo que fueren.

—Tal vez eran perros collie —dijo Annabel, su hija, riendo.

—*Colly*... Palabra obsoleta que designa al mirlo —dijo Edmund, hojeando el diccionario.

—¡Oh, cállate, Edmundo! —dijo Charles, el fastidioso hermano menor de Annabel—. ¡No seas tan pedante!

—Lo que jamás entendí —dijo el anciano y gotoso barón Goutsfoot — es por qué esa endemoniada canción...

—¡Abuelo! ¡Cuida tu lenguaje!

—Lo lamento, querida Hilda... Por qué la condenada canción comienza con pájaros y animales para terminar con lores y damas y tambores. Una endemoniada incoherencia, a mi entender. Con tu perdón, querida Hilda.

—La letra de la canción francesa difiere de una región a otra —dijo la hija de la condesa, Esmeralde, quién estudiaba poesía en la Sorbona —. En la versión más temprana, la del siglo dieciséis, comienza con *"Douze chevaliers, onze demoiselles...",* peno luego vuelve a los animales. Y hay una versión canadiense con los días del año, que continúa sin cesar... La cantan para adormilar a los niños.

—Siempre me he preguntado —intervino el festejante de Hilda, Oville, que venía de Oxford para pasar el fin de semana— para qué eran los cinco anillos de oro.

—Para atravesarlos por tu nariz, querido —dijo Hilda.

—Niños, niños —dijo lord Roderick—. ¡Basta de reñir! Pues ha llegado la hora de la más antigua tradición de Baffleham... ¡las adivinanzas de Navidad! Espero que todos estéis preparados. —Todos asintieron, excepto el tío Crispin, quien se había dormido—. Y, viendo que somos doce, propongo que juguemos una versión de la canción que comentamos, los *Doce Días de Navidad.* Os advierto que, por una larga tradición, al menos una adivinanza es difícil de veras... Pero desde luego no diré cuál.

—Tú primero, Edmund.

Doce tambores batientes...

—Vaya, gracias... —dijo Edmund, quien había preparado un problema con jugadores de naipes—. Bien, esta adivinanza es sobre... eh... doce tambores.

Hizo una pausa.

—Continúa, Edmund.

—Eh. Vaya... Bien... tal vez lo ignoréis, pero yo estuve en la Guardia.

—Sí, cuidaba el jardín —dijo Hilda dulcemente.

—No, la Guardia Aerotransportada de Auxilio. ¡Habréis oído hablar de la RAF! De cualquier modo, estaba en la banda del regimiento...

—El regimiento estaba bien, sólo prohibieron a Edmund...

—La música de la banda era pegadiza. La llamaban banda adhesiva.

—Gracias, Annabel. Pero, hablando de tambores, había una tradición en el regimiento, la competencia entre tambores. Hubo varios eventos, en verdad; los simples, los dobles...

—¿Los whiskies dobles?

—Podéis burlaros. Los dobles eran como una liga. Había doce tambores en total y se formaban en pares. Los pares no eran fijos, desde luego; la idea era hallar el mejor par. El concurso duraba once días...

—Bien, hay mucha variedad en el tamborileo, hay que dar a la gente la oportunidad de demostrar lo que puede hacer...

—No, no tocábamos todo el día. Había sólo una ronda diaria, celebrada antes de diana para no molestar a nadie. Con doce tambores hay sesenta y seis parejas. Cada ronda consistía en tres competencias distintas entre dos pares de tambores, porque eso suma doce tambores en total. Eso significa seis parejas por día, y seis entra once veces en sesenta y seis.

Annabel aplaudió irónicamente.

—Cada día participaban los doce tambores. Y para que fuera justo, cada tambor tenía a cada uno de los demás tambores una vez como acompañante, y dos veces como oponente.

—La adivinanza es...

—...por qué cuernos se tomaban esa molestia.

—No, Charles, y quita las zarpas de ese adorno. No, la adivinanza es: ¿cómo lo hacían?

Once flautistas tocando…

—Quizá no sepáis esto —comenzó Hilda—, pero, como Edmund, tengo un pasado musical. Yo era flautista de la Orquesta Filarmónica de Londres.

Hilda moqueó.

—Me fui después de una disputa. Me trataron con suma injusticia. Había once flautistas, y un día llegó una partida de flautas nuevas. El primer flautista se llevó una undécima parte de las flautas más una undécima parte de una flauta.

—¿Cómo se puede tocar la undécima parte de una flauta?

—Bien, en realidad no cortaron ninguna flauta. El siguiente se llevó un décimo del resto, más un décimo de una flauta. El siguiente se llevó una novena parte del resto más la novena parte de una flauta, y así sucesivamente... El penúltimo se llevó la mitad de lo que quedaba más media flauta. Yo era la última. Cuando vi lo que me habían dejado, me enfadé y renuncié en el acto.

—¿Por qué?

—Todos tenían el doble de flautas que yo.

—¡Qué terrible! ¿Pero cuál es la adivinanza, querida?

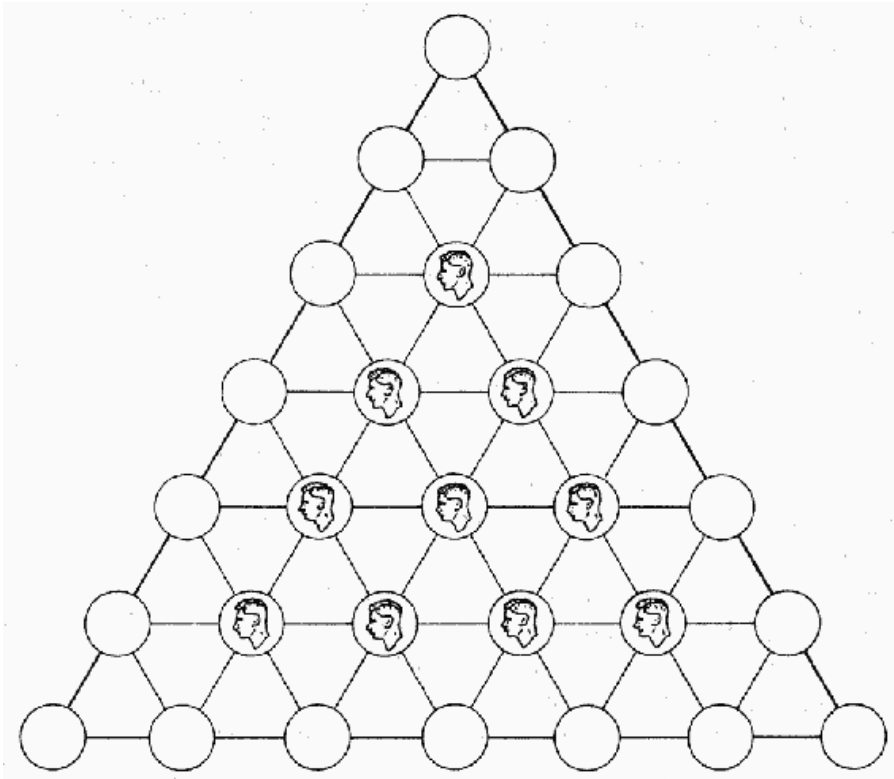
—¿Cuántas flautas había en la partida?

Diez lores saltarines...

El gotoso barón Goutsfoot se levantó de un sillón Reina Ana y enfiló hacia el escritorio, donde cogió un papel y dibujó un diagrama (figura 12.1). Mostraba veintiocho círculos unidos por líneas para formar una red triangular. Hurgó en los bolsillos, halló diez soberanos de oro y los puso en los diez círculos centrales.

—Este juego simboliza cómo se toman las decisiones en los niveles políticos más elevados —gruñó—. El triángulo representa la Cámara de los Lores, que como todos sabemos es la que realmente gobierna el país, y el círculo del medio (número 13, un número auspicioso) representa una banca en el Consejo Privado.

—Bien, los diez soberanos representan a diez lores. Se turnan para saltar encima del lord contiguo hacia un círculo vacío que esté inmediatamente más allá en línea recta. El lord sobre el cual saltan pierde influencia y queda eliminado. La primera adivinanza, pues, es ¿cómo pueden hacer esto para terminar con un solo lord sentado en el Consejo Privado?



12.1. ¿Cómo pueden saltar diez lores, dejando sólo uno?

—¡Menos mal que no debía sentarse en el retrete! ¡No llegaría nunca! —aulló Charles, ganándose un coscorrón.

—Vaya —dijo Edmund—. Es como un solitario.

—Se *parece* a un solitario —admitió el barón, algo ofendido—. Edmund, ya que eres tan listo, te daré otra adivinanza. Tres de los lores quieren ser Lores de la Ley, quienes permanecen en las esquinas externas de la Cámara. ¿Cómo pueden los diez lores comenzar en la misma posición, saltar uno sobre otro siguiendo las mismas reglas, para que queden tres lores, cada cual en cada una de las tres esquinas (números 1,22,28)?

—¿Esta es la adivinanza difícil? —preguntó Edmund preocupado.

—Tal vez. Tal vez no.

Nueve damas danzarinas...

—¡Esta es mía! —exclamó el lascivo pero senil duque de Balmuddle, cuyas aspiraciones excedían su capacidad—. ¡Traed a las bailarinas!

—Recuerda, Courtney, que hay un menor presente —advirtió lady Chattermere—. En todo caso, ya estás viejo para bailarinas.

—Calma, esto será totalmente respetable —dijo el duque.

—¡Maldición! —masculló Charles.

—En el castillo Balmuddle hay una danza que se remonta a los tiempos del clan MacCroney, cuando el gran Cameron Dunrovin tomó las gaitas. ¡Ah, eran grandes días para Escocia! Nueve damas se disponen en círculo. Tres usan sombrero verde; tres, sombrero rojo, y tres, sombrero azul.

Las damas se turnan para bailar en pareja en el círculo mientras las otras giran en el lugar. Una vez que han bailado cuatro parejas, la dama restante baila sola en el círculo.

El diseño de la danza es que la primera pareja determina el orden de todas las demás, de esta manera. Si sacamos un par de damas de un círculo, creamos dos arcos de damas contiguas, a menos que las dos originales sean adyacentes, en cuyo caso queda un solo arco. Si bailan un par de damas con el mismo color de sombrero, el siguiente par está formado por las damas de los extremos del arco más largo que quedó en el círculo. Si bailan un par de damas con sombreros de diferente color, luego la siguiente pareja está formada por las dos damas de los extremos del arco más corto. Si se crea un arco con una sola dama en él, ésta debe bailar sola.

La primera pareja se escoge libremente, pero luego se aplican las reglas. El problema es cómo disponer a las damas de modo que bailen las nueve, cuatro en pareja y una a solas. Debo añadir que Cameron Dunrovin decretó que tres damas con sombrero de idéntico color no podían estar cercanas entre sí en el círculo, pero que en alguna parte del círculo dos damas con sombrero rojo debían estar juntas, así como dos con azul, y dos con verde.

Ocho criadas ordeñando...

—En el establo —explicó Esmeralde— había ocho criadas que ordeñaban ocho vacas, sentadas en círculo. En el sentido de las agujas del reloj, las criadas tenían cubos que podían contener exactamente 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... ¿cómo se dice aquí...? Ah, galones. Galones de leche. Cuando terminan de ordeñar, los cubos 4, 5, 6 y 9 están llenos, y los demás están vacíos.

Ahora bien, cada criada debe volver a la granja con la misma cantidad de leche, es decir, tres galones por cubo. De lo contrario el granjero pensaría que algunas de ellas son perezosas y se enfadaría.

Pueden verter leche de cualquier cubo a los adyacentes en el círculo. ¿Cómo pueden las criadas compartir la leche, de modo que cada cubo contenga exactamente tres galones?

Siete cisnes nadando…

—Bien —dijo Orville—, no había planeado uno sobre cisnes... Tenía uno muy difícil sobre patos...

—¡Cállate, Orville! —chilló Charles—. ¡De todos modos es mi turno! ¡Tú tienes que hacer las gallinas francesas! —Miró a los reunidos—. Aunque no sé por qué son *tres* gallinas francesas —dijo. La condesa y la hija se ruborizaron pero fingieron no entender el insulto.

—Puedes aprovechar tu turno, Charles —dijo lady Chattermere—. Y si dices otra impertinencia pasarás el resto de la Navidad en tu habitación.

—Sí, madre. Lo lamento, madre. Bien, había siete cisnes que vivían en ocho lagos conectados por canales, así (figura 12.2). Les gustaba tomar sol en las orillas, pero cuando el guardián venía a alimentarlos todos saltaban al agua.

Uno tras otro, cada cisne saltaba a un lago vacío y luego nadaba por un canal hasta el siguiente lago, que también estaba vacío.

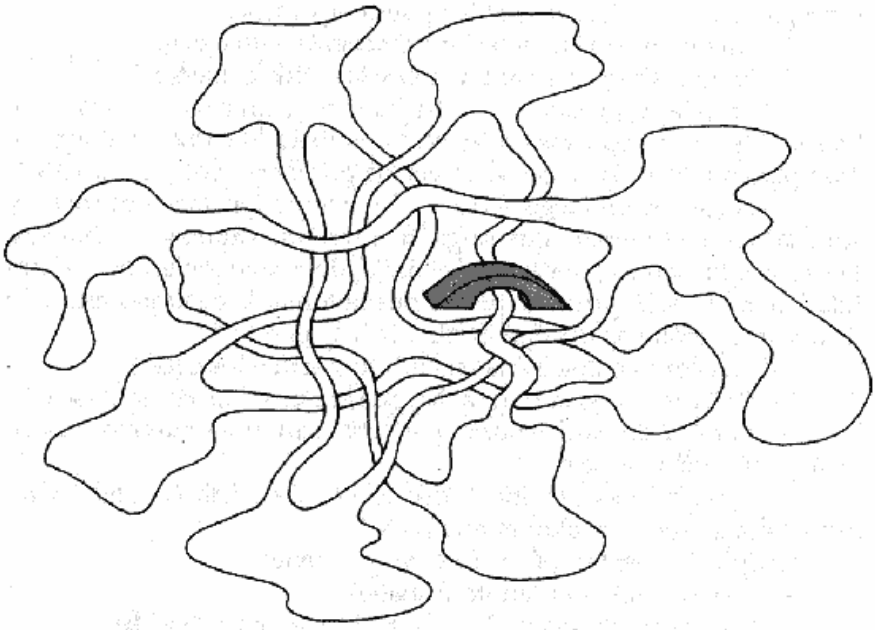
¿Cómo lo hacían?

—Es una adivinanza estúpida —dijo Orville—. Ante todo, los canales se cruzan.

—Son ocaductos —dijo Charles.

—*Acueductos,* querrás decir, pequeño idiota. De todos modos, empiezas *aquí,* y desplazas el primer cisne bajo el puente hasta...

—Pero había un cazador furtivo agazapado bajo el puente —dijo Charles—. Y los cisnes sabían que los capturaría para comerlos en Navidad, así que no iban por allí.



12.2. Lagos de los cisnes

Seis gansos aovando...

Con gran esfuerzo despertaron al tío Crispin y le explicaron las reglas de los Doce Juegos de Navidad.

—¿Adónde hemos llegado, pues?

—Seis gansos aovando.

—Ah, gansos... Seis gansos... ¡Eso es! Este es muy difícil, y trata sobre una muchacha que cuidaba gansos...

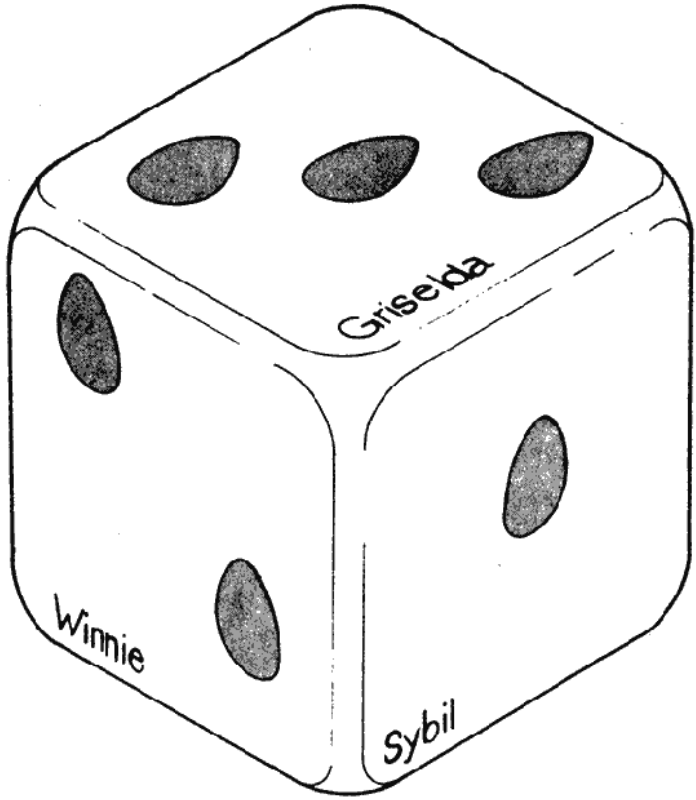
—Una muchacha apetitosa, espero —dijo Orville con una sonrisa lasciva.

—¡No digas gansadas! —dijo Charles. Orville alzó el puño; Charles le sacó la lengua y se ocultó detrás de una armadura.

—La muchacha tenía seis gansos, y llevaba su cesto de huevos a la granja —dijo Crispin—. En el camino se cruzó con el pastor, quien le preguntó cuántos huevos habían puesto los gansos.

"—Un número primo inferior a cincuenta —dijo ella."

"—Preguntaba por la cantidad exacta —dijo el pastor."



12.3. El dado de la muchacha, con huevos de gansos en vez de puntos.

—Por toda respuesta, la muchacha extrajo un cubo con los nombres de los gansos escritos en las caras, numerado como un dado común pero con huevos de ganso en vez de puntos negros (figura 12.3).

"—Hagamos un juego —dijo—. Tú arrojas los dados primero, y sea cual fuere el número que salga, te llevas esa cantidad de huevos. Luego nos turnamos para arrojar el dado, de nuevo tomando esa cantidad de huevos. El primero que no pueda tomar la cantidad indicada de huevos, porque no quedan los suficientes, pierde."

—El pastor dijo que había entendido y arrojó los dados.

"—Perdiste —dijo la muchacha, que era una experta en lógica."

—El pastor dijo que tendría que haber salido un número más alto, o quizás uno más bajo.

"—Igual habrías perdido —dijo ella—. Pero habrías podido ganar si hubiera salido cualquier otra cosa."

Crispin se interrumpió, sonriente, y se sentó.

—¿Eso es todo? —preguntó Annabel.

—¿Cuál es la adivinanza? —dijo el duque de Balmuddle.

—Ah, me olvidaba esa parte —dijo Crispin—. ¿Cuántos huevos había en el cesto, y qué número sacó el pastor?

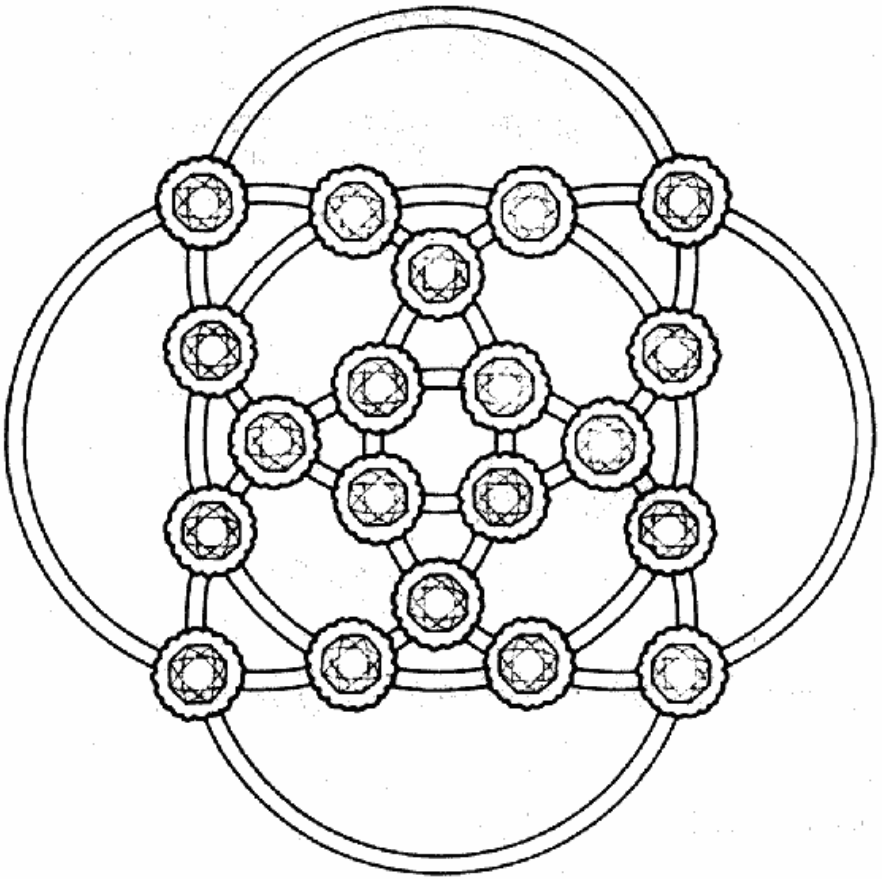
Cinco anillos de oro...

—Mi turno, Roderick —dijo con firmeza lady Chattermere. Hurgó en la cartera y sacó una extraña joya—. Un legado que ha estado en la familia desde los tiempos de lord Jocelyn, quien llevaba cinco anillos de oro y veinte diamantes en la mochila cuando recibió un impacto en la caja durante la Batalla de Bagdad.

—¿Un impacto en la caja? ¡Qué horror! ¿La caja torácica?

—¡Peor aun! La caja donde llevaba la paga del regimiento.

—¿Que consistía en cinco anillos de oro y veinte diamantes?



12.4. Cinco anillos de oro

—Claro que no. Hay muchos modos de jugar con las cuentas del regimiento sin apropiarse de mercancías. Un oficial de intendencia sagaz puede amasar una fort... Pero eso no tiene importancia. De todos modos, cuando terminó la batalla, lord Jocelyn quiso que le

confeccionaran un broche con los anillos. Cuando el joyero oyó las instrucciones, pensó que lord Jocelyn había recibido un impacto en la cabeza.

—Como veis, hay cinco anillos de oro.

"—Quiero que los cinco anillos queden unidos —le dijo lord Jocelyn—. Así (figura 12.4), e incrustados con diamantes en los cruces."

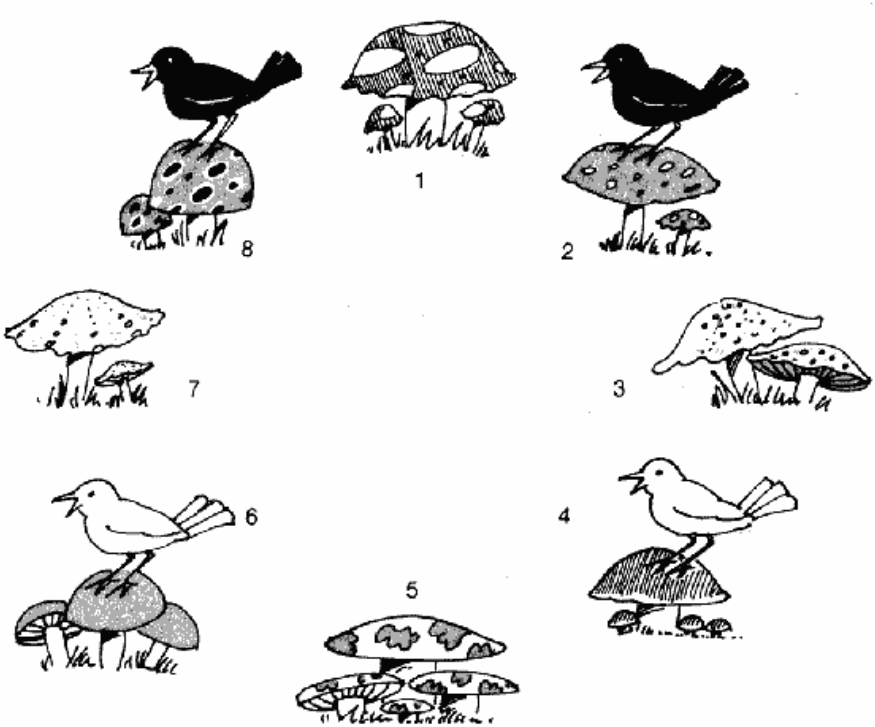
"—Fácil —dijo el joyero—. Es decir... será muy caro, pero sin duda podré hacer un excelente trabajo."

"—Bien —dijo lord Jocelyn—. Pero hay una condición más. Hay veinte diamantes en total, y pesan 1 quilate, 2 quilates... y así sucesivamente hasta llegar a 20 quilates. Hay ocho diamantes en cada anillo. Deben quedar dispuestos de tal modo que el número total de quilates de cada cual sea el mismo."

—El joyero logró hacerlo al fin, de allí la existencia de esta joya. ¿Pero podéis vosotros pensar en un ordenamiento adecuado?

Cuatro pájaros trinando...

—Como bien explicó Edmund —dijo Annabel—, estos pájaros son mirlos. Bien, cuatro mirlos estaban sentados en setas. (Figura 12.5)



12.5. Cuatro mirlos.

—Dos de ellos son blancos, Annabel —señaló Edmund.

—Dos mirlos y dos mirlos albinos estaban sentados en setas —continuó Annabel.

—Así llamadas porque los pájaros pueden "setarse" en ellas —intervino Charles.

—Cállate, mocoso. Como bien sabéis, los círculos de setas se llaman "anillos de las hadas". Bien, este anillo de las hadas tenía ocho setas. Los dos mirlos y los dos albinos estaban sentados en setas alternadas, con los mirlos al norte y los albinos al sur.

Querían cambiar de lugar de tal modo que los dos mirlos negros quedaran en las setas ocupadas por los albinos, y viceversa. Pero para no ofender a las hadas que habían construido el anillo, sólo podían hacerlo desplazándose tres setas por vez, en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario. Pues tres es un número mágico.

¿Cómo lo hicieron?

Tres gallinas francesas...

—Esta adivinanza trata sobre unas trillizas llamadas Nicole, Nathalie y Nancy.

—Tienen que ser gallinas, no trillizas —protestó Charles.

—Pues estas trillizas cloqueaban bastante, como pronto veréis.

—¡Nancy no es nombre francés!

—Pues sí. Hay una localidad llamada Nancy al oeste de Estrasburgo. Estas jóvenes parlanchinas obedecían una regla inmutable. Nicole mentía y decía la verdad alternativamente, Nathalie siempre decía la verdad, y Nancy mentía siempre. Lamentablemente las tres eran iguales y nadie podía distinguirlas.

Un día estaban sentadas juntas en la escalinata de la casa y se produjo la siguiente conversación. Aquí D es la mujer de la derecha, M la mujer del medio e I la mujer de la izquierda.

I [a M]: Eres una mentirosa.
M: ¡No lo soy!
D: Ambas sois mentirosas.
I: ¡Eso es mentira!
M: ¡Eso es mentira!
D: ¡Eso es mentira!

¿Cuál gallina... digo... cuál trilliza es cuál?

Dos tórtolas...

—Es poco sabido que las tórtolas no siempre están atorteladas —dijo la Comtesse de Malfamée—, y que algunas son muy buenas en

aritmética. Un día había dos tórtolas posadas en una rama.

"—Estoy pensando en un número inferior a cien —dijo ella."

"—Yo también —dijo él. Y añadió—: Dime tu número."

—Ella lo dijo, y él le dijo el suyo, señalando que los dos números no tenían dígitos en común.

"—Vaya, qué notable —dijo ella—. Si sumamos nuestros números y elevamos el resultado al cuadrado, obtenemos un número de cuatro dígitos cuyos dos primeros dígitos son tu número y cuyos dos últimos dígitos son el mío."

"—Quieres decir, ¿como 30 más 25 da 55 y elevado al cuadrado da 3025?" —preguntó el tórtolo.

"—*Oui* —dijo la tórtola—, pero no son esos números."

—¿Qué números habían pensado las tórtolas? —concluyó la condesa.

Y una perdiz en un peral…

Lord Roderick de Baffleham dejó el cigarro y se levantó.

—Es prerrogativa del anfitrión poner fin a este evento tradicional. En el jardín de la mansión Baffleham —dijo con voz estentórea—, hay un peral.

—Supongo que cientos —dijo Orville.

—Sí, pero tengo en mente uno en particular, Orville. Una de las peras de este árbol (figura 12.6) es realmente una perdiz.

—¡Vaya, señor! Regordeta y sin patas, ¿eh?

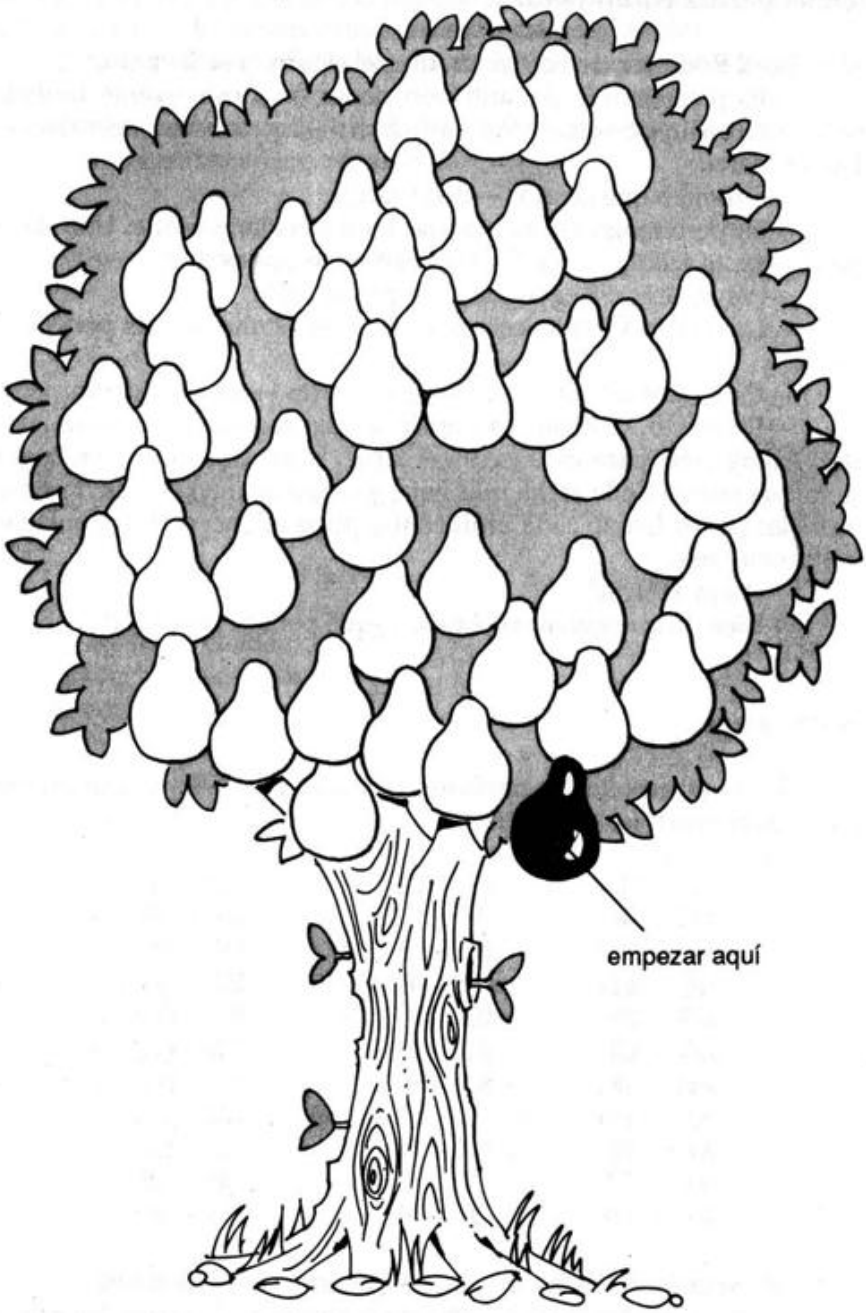
—La perdiz, Orville, está parcialmente oculta por las peras vecinas.

—Está entre las peras, no entre sus pares —señaló Crispin.

—En efecto, Crispin. La perdiz se está escondiendo de un cazador. Ahora bien, para meterse en el árbol, la perdiz empezó en la gran pera que cuelga de la rama más baja, y luego avanzó con cierto orden entre las peras. Cruzó cada límite entre peras adyacentes una sola vez, hasta ocultarse.

—¡Vaya astucia!

—Bien, lo que quiero saber es… ¿qué pera es la perdiz?

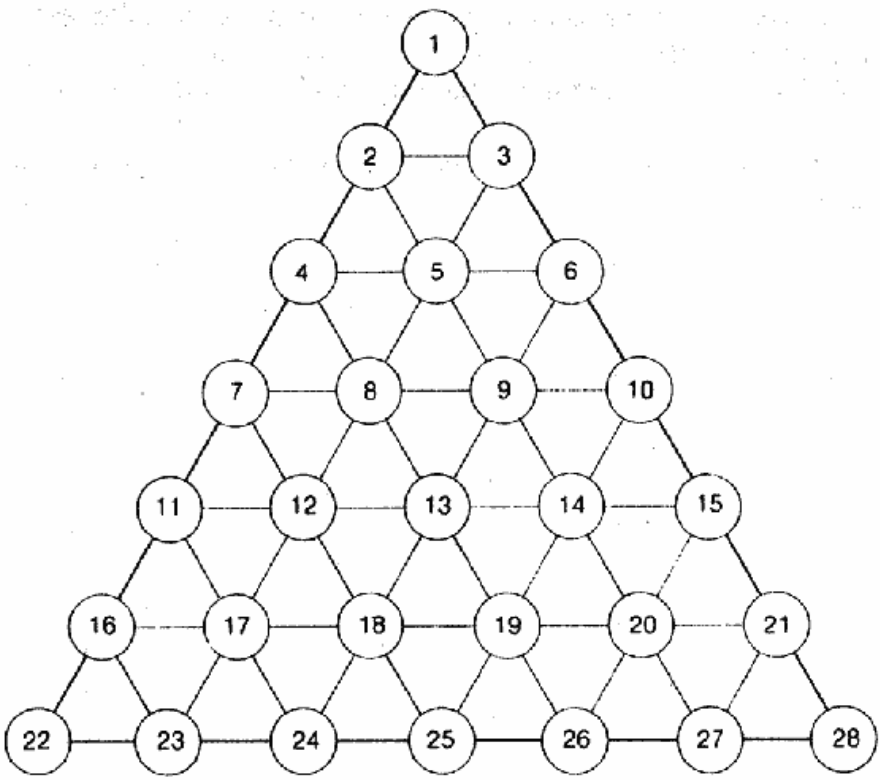


12.6 ¿Qué pera es la perdiz?

Soluciones

12. Denotemos a los tambores con las letras A-L. Así, en los once días, un ordenamiento posible es:

11. Veintiuno. Todos los demás tomaron dos, Hilda una.

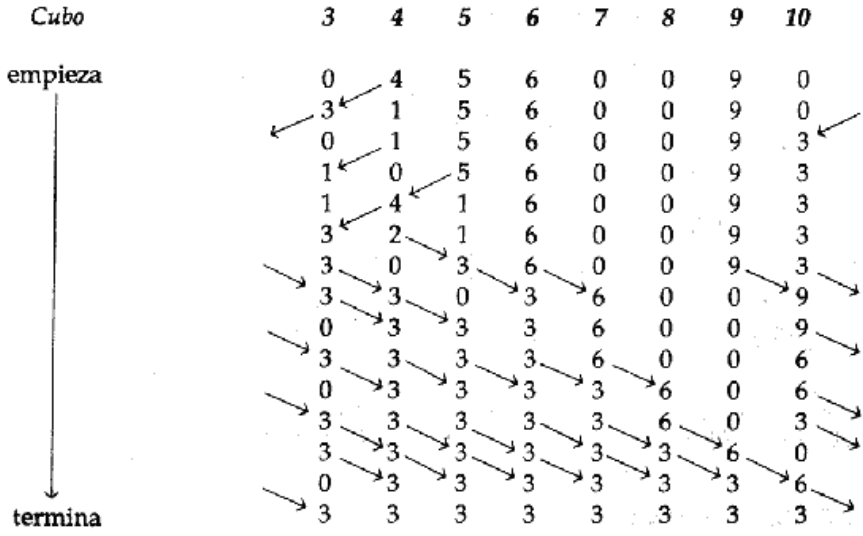


12.7. Diez lores saltarines

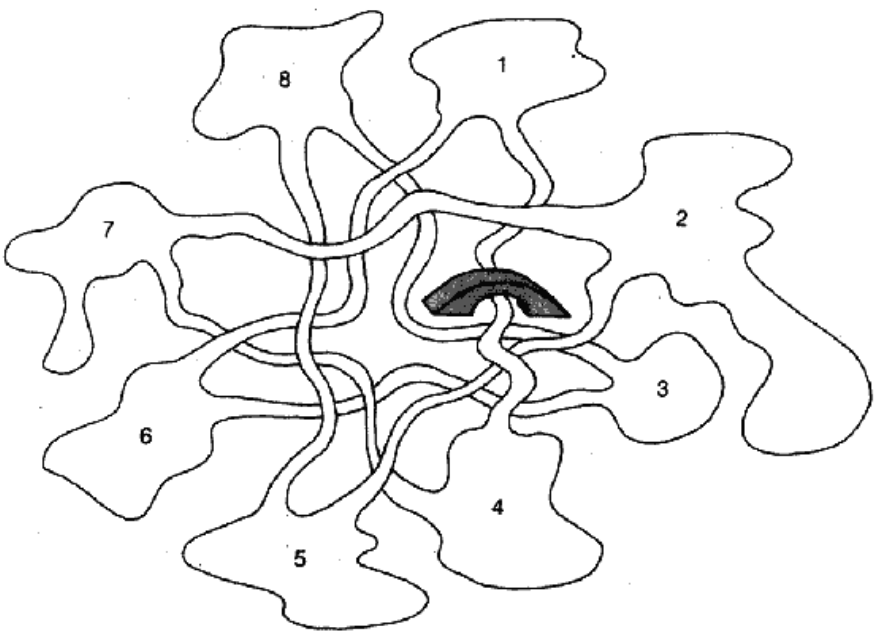
10. Numere las células como en la figura 12.7. Luego las soluciones son : (a) 13 → 4,17 → 8, 14 → 25, 25 → 12, 5 → 14, 20 → 9,12 → 5, 4 → 6, 6 → 13. (b) Imposible. Coloree las células 1, 4, 6, 11, 13, 15, 22, 24, 26, 28. Luego todo lo que empiece en un círculo de color termina en uno, y viceversa. Las tres células de las esquinas son de color, pero sólo un lord, el del centro, empieza en un círculo de color.

9. GGBBRRGRB, empezando en G G. Hay otras posibilidades.

8. He aquí una posibilidad. Las flechas muestran el movimiento de la leche entre los cubos adyacentes.



7. Numere los lagos en el sentido de las agujas del reloj de 1 a 8, como en la figura 12.8. Entonces los sucesivos movimientos son 6 → 1, 3 → 6, 8 → 3, 5 → 8, 2 → 5, 7 → 2, 4 → 7. Cada cisne nada hacia el lago donde se zambulló el anterior.



12.8 Siete cisnes nadando

6. Cuarenta y tres huevos, y el pastor sacó un tres. Esta es la adivinanza “muy difícil” prometida por lord Roderick. Se basa en un análisis general de la estrategia ganadora, donde el total buscado es arbitrario. La estrategia se halla partiendo de la posición final, y se muestra en la tabla siguiente: ésta presenta el/los movimiento/s ganador/es de cada combinación del actual total y la cara del dado. “P” designa una posición perdedora: sea cual fuere el movimiento que uno haga, el oponente puede vencer.

El resultado es un patrón que se repite cuando el total se incrementa por 9, con pocas excepciones al comienzo. Así, para los totales mayores de 7, la estrategia depende sólo de la raíz digital del total (la suma de los dígitos, repetida hasta que la respuesta esté en la gama 1-9). La muchacha, siendo experta en lógica, elaboró este patrón al instante. Nos dicen que el resultado del pastor, el número inmediato superior y el inmediato inferior todos llevan a una posición perdedora.

	cara visible	
	2	6
1	P	1
1,2	2	2
P	3	3
P	4	4
P	5	5
6,3	3	6
6,3,2	4	3,4 7
P	4	8
P	P	9
1,5	5	10
2	2,3	11
P	3,4	3,4 12
P	4	13
P	5	14
6,3	3	15
2	2,3,4	16
de aquí en adelante se repite a partir de 8		17

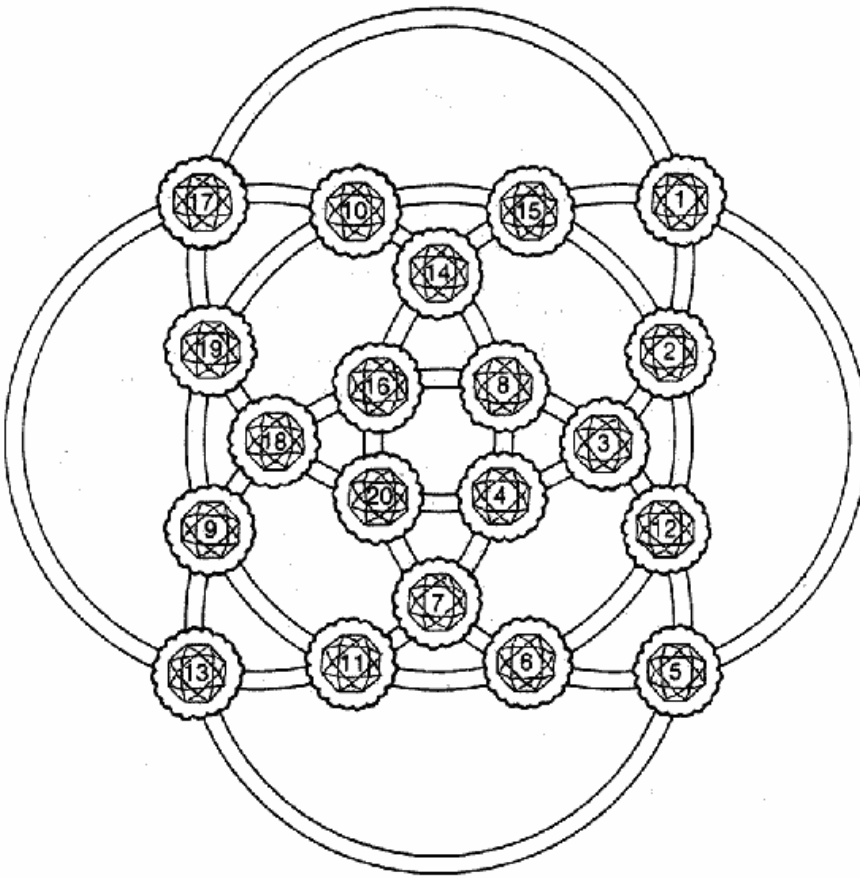
El patrón estratégico indica que las únicas tres tiradas consecutivas que pueden llevar a una posición perdedora son 2, 3 ,4, así que el muchacho arrojó el del medio: 3. Los números de huevos para los cuales *2,* 3, 4 son posiciones perdedoras son las que tienen una raíz digital de 7, con la excepción del 7 mismo, por lo cual 6 también pierde. El único número primo inferior a 50 con raíz digital 7 es 43. Así que hay cuarenta y tres huevos.

5. Véase la figura 12.9.

4. Si las setas están numeradas como en la figura 12.5, una solución es: 8 → 3, 2 → 5, 5 → 8, 4 → 7, 7 → 2, 2 → 5, 6 → 1, 1 → 4, 4 → 7, 7 → 2, 3 → 6, 6 → 1, 1 → 4, 8 → 3, 3 → 6, 5 → 8.

3. Hay seis ordenamientos posibles. Por ensayo y error, descubrimos que Nathalie está a la izquierda, Nancy en el medio y Nicole a la derecha.

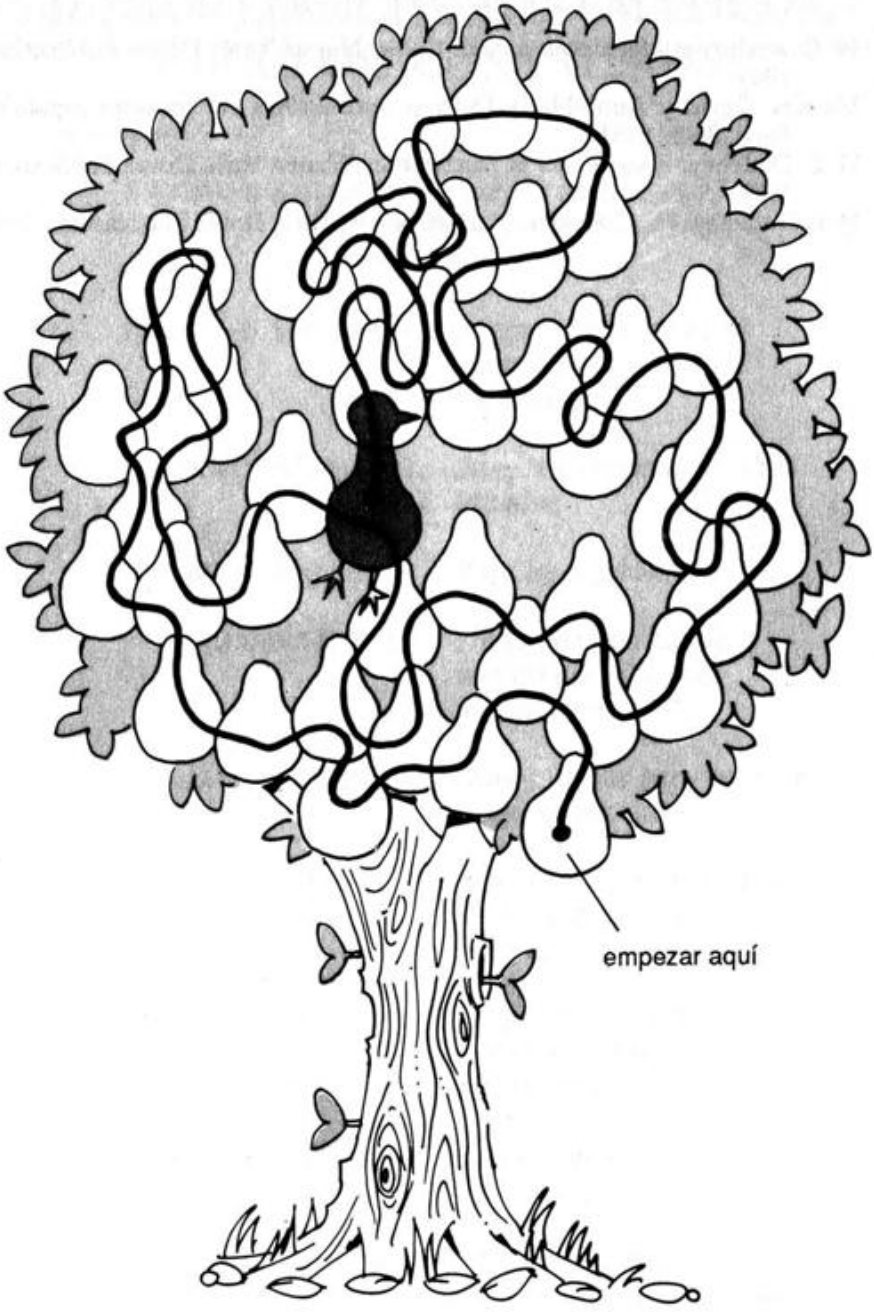
2. 98 y 01.



12.9. Cinco anillos de oro más los diamantes

1. Cuando la perdiz entra y sale del espacio ocupado por una pera, cruza dos límites entre peras adyacentes. Por lo tanto, excepto en los extremos del viaje, cada pera debe tocar un número par de otras peras. Por lo tanto las peras de los extremos del viaje son las que tocan un número impar. La pera donde empieza la perdiz toca otra pera. La única pera del árbol, aparte de ésta, que toca una cantidad

impar de peras, es la mostrada en la figura 12.10, con tres vecinas. La figura también muestra una posible ruta.



12.10. La perdiz en el peral.

Otras lecturas

W. S. Andrews: *Magic Squares and Cubes,* Nueva York, Dover

Publications, 1960.

Martine David y Anne-Marie Delrieu: *Aux sources des chansons populaires,* París, Belin, 1982.

H. E. Dudeney: *Amusements in Mathematics,* Nueva York, Dover Publications, 1958.

H. E. Dudeney: *The Canterbury Puzzles,* Nueva York, Dover Publications, 1958.

Editorial Gedisa ofrece los siguientes títulos sobre
JUEGOS LOGICOS, MATEMATICOS, PSICOLOGICOS Y OTROS
pertenecientes a sus diferentes colecciones y series
(Grupo “Juegos, Humor y Esoterismo”)

Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática — IAN STEWART, ERIC EMMET

Juegos para devanarse los sesos	
Juegos de acertijos enigmáticos	Eric Emmet
Problemas y juegos con la matemática	Henri Camous
Juegos con números	Gyles Brandreth
Juegos para imitar a un pájaro imitador	Raymond Smullyan
	Raymond Smullyan

Juegos por siempre misteriosos
Juegos lógicos en el mundo de la inteligencia artificial J. FRIANT E Y. L'HOSPITALIER
Juegos. Los mágicos números del Dr. Matrix MARTIN GARDNER
Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia RAYMOND SMULLYAN
Juegos y problemas de ajedrez para Sherlock Holmes RAYMOND SMULLYAN
Juegos y enigmas de otros mundos MARTIN GARDNER
NICHOLAS FALLETTA

Paradojas y juegos

Juegos de recreación mental para los muy inteligentes	JAMES F. FIXX
Guía y juegos para superar bloqueos mentales	JAMES L. ADAMS
Nuevos juegos de ingenio y entreteniemiento matemático	JEAN-PIERRE ALEM
Juegos de ingenio y entretenimiento matemático	JEAN-PIERRE ALEM
Cómo aprender de las derrotas	ANATOLY KARPOV
El libro de los tests. Conózcase a usted mismo	B. M. NASH Y R. B. MONCHICK
El libro de los tests. Usted y los otros	B. M. NASH Y R. B. MONCHICK

Notas

{1} Estos dos personajes (Tweedledumb y Tweedledim) aluden a los célebres Tweedledum y Twedledee que encuentra Alicia en *A través del espejo* de Lewis Carroll: los simétricos gemelos constituyen una curiosidad geométrica en sí misma. [T.]

{2} No he podido reproducir el resultado, y no encontré ninguna referencia al tema para comprobar la fórmula [Sargont].